純虚ケーリー代数内の超曲面上の概複素構造について

大橋美佐 (名城大学大学院理工学研究科)

八元数

四元数 $\boldsymbol{H}$ の直和を $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$ とおき, 次の積構造を導入した代数をケーリー数とよぶ.($\boldsymbol{O}$ は標準的な内積を持つ 8 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^8$ と同一視できる.)

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon \quad {}^{\forall}a, b, c, d \in \boldsymbol{H}$$

この積は非可換で非結合的である. また任意の $x, y \in \boldsymbol{O}$ に対して

- normed algebra
$$\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$
- 交代性
$$x(xy) = (x^2)y \ , \ x(yx) = (xy)x \ , \ (yx)x = y(x^2)$$

が成り立つ. この代数構造により, $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ 内の任意の可符号 6 次元超曲面上に概エルミート構造が存在する.

6 次元超曲面上の概エルミート構造

M を向き付けられた 6 次元多様体 , $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ をケーリー代数の純虚数部分とする. M から $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ へのはめ込みを

$$\psi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$$

とし, 単位法ベクトル場を ξ とおく. $\boldsymbol{O}$ の性質から M の各点 p に対して線型変換 J_p を

$$\psi_*(J_pX) = \psi_*(X)\xi$$

と定義することができる. ここに $X \in T_pM$ を表す. このとき,

- $J_p(J_pX) = -X \quad for\,{}^{\forall}X \in T_pM$
- 誘導計量 g に関して適合する.
$$g(J_pX, J_pY) = g(X, Y) \quad for\,{}^{\forall}X, Y \in T_pM$$

を満たす.

M の各点 p に対してこの J_p を指定する $(1, 1)$ 型のテンソル場 J のことを概複素構造と呼ぶ.

G_2 合同

$\boldsymbol{O}$ の積を保つ自己同型群として G_2 を

$$G_2 = \{g \in SO(8) | g(uv) = g(u)g(v) \quad for\ ^{\forall}u, v \in \boldsymbol{O}\}$$

とおく. このとき, G_2 は $SO(7)$ の Lie 部分群となることがわかる.

ψ , $\psi' : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を 2 つはめ込みとする. $g \in G_2$ が存在して

$$g \circ \psi = \psi' \quad (\text{平行移動を除く})$$

となるとき, ψ と ψ' は G_2 合同であるという. ψ, ψ' から誘導される概複素構造をそれぞれ J, J' とする.

$$\psi \text{ と } \psi' \text{ が } G_2 \text{ 合同 } \Longrightarrow J = J'$$

である.

従って概複素構造は G_2 合同類に関する不変量である.

G_2 adapted fram field の構成方法

ξ を M 上の大域的な単位法ベクトル場とし, この ξ から M 上の局所的な G_2 frame field $(e_1, \cdots, e_7)$ を以下の様に構成する.

任意の点 $p \in U$ に対して (ただし U は p の十分小さい近傍を表す)

$$e_4(p) = \xi(p)$$

とおく. 次に

$$e_1(p) \in T_{\psi(p)}M \ , \ (|e_1(p)| = 1)$$

を取る. $e_5(p)$ を

$$e_5(p) = e_1(p)e_4(p)$$

とし, さらに

$$e_2 \in (span_{\boldsymbol{R}}\{e_1(p), e_4(p), e_5(p)\})^{\perp} \quad (|e_2| = 1)$$

をとる. $e_3(p), e_6(p), e_7(p)$ を次の様に定める.

$$e_3(p) = e_1(p)e_2(p) \quad , \quad e_6(p) = e_2(p)e_4(p) \quad , \quad e_7(p) = e_3(p)e_4(p)$$

e_i を U の各点 p に対して $e_i(p)$ を指定するベクトル場とする．このとき $(e_1, \cdots, e_7)$ は構成法から $(i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon)$ と積構造が同じであるから

$$\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k & \varepsilon & i\varepsilon & j\varepsilon & k\varepsilon \end{pmatrix} A$$

となる. 従って A は G_2 に値を持つ関数となる事がわかる.

M の各点 p の接空間 T_pM の複素化を $T_pM \otimes \boldsymbol{C}$ とする．$T_pM \otimes \boldsymbol{C}$ を概複素構造 J に関して以下の様に固有空間分解をしよう. 上記の frame field を用いて

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2}(e_1 - \sqrt{-1}Je_1) = \dfrac{1}{2}(e_1 - \sqrt{-1}e_5) \\[2ex] f_2 = \dfrac{1}{2}(e_2 - \sqrt{-1}Je_2) = \dfrac{1}{2}(e_2 - \sqrt{-1}e_6) \\[2ex] f_3 = -\dfrac{1}{2}(e_3 - \sqrt{-1}Je_3) = -\dfrac{1}{2}(e_3 - \sqrt{-1}e_7) \end{cases}$$

とおくと $Jf_i = \sqrt{-1}f_i \quad (i = 1, 2, 3)$ を満たす. 従って (f_1, f_2, f_3) は $\sqrt{-1}$ 固有空間の基底となる.

この分解を用いて超曲面の構造方程式を述べる．$T_pM \otimes \boldsymbol{C}$ の基底は $\{f_i, \bar{f}_i\}$ であるから

$$d\psi = \sum_{i=1}^{3} (f_i\omega^i + \bar{f}_i\bar{\omega^i})$$

とできる. ここに ω^i は $\boldsymbol{C}$-valued 1-form である.

$\langle \xi, \xi \rangle = 1$ より $\langle d\xi, \xi \rangle = 0$ となる. 従って

$$d\xi = \sum_{j=1}^{3} f_j\mathfrak{h}^j + \bar{f}_j\bar{\mathfrak{h}^j}$$

と表示できる. ここに各 $\mathfrak{h}^j$ は $\boldsymbol{C}$-valued 1-form である.Cartan の lemma より A, B を $M_{3\times3}(\boldsymbol{C})$ に値を持つ関数が存在して

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

となる. ここに各成分 $A = (A_{ij}), B = (B_{ij)}$ は

$$B_{ij} = \left\langle \mathrm{II}(f_i, \bar{f}_j), \xi \right\rangle, A_{ij} = \langle \mathrm{II}(f_i, f_j), \xi \rangle$$

で与えられる. このとき

$$tr({}^t\bar{B}B), tr({}^t\bar{A}A)$$

は M 上の大域的な関数で, G_2 合同類に関する不変量となる.

例

はめ込み $\psi : \boldsymbol{R}^2 \times S^4 \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を

$$\psi(x_1, x_2, y_0, y_1 q) = y_0 i + x_1 j + x_2 k + y_1 q \varepsilon$$

とする. ここに $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, $q \in S^3 \subset \boldsymbol{H}, y_0^2 + y_1^2 = 1$ である. 上記の方法で G_2 frame を構成し, 第 2 基本形式を計算すると,ψ の G_2 合同類に関する不変量は

$$tr^t \bar{B} B = \frac{1}{2}(3 + y_0^2)\ ,\ tr^t \bar{A} A = \frac{1}{2} y_1^2$$

である. 従って $\boldsymbol{R}^2 \times S^4$ はリーマン多様体としては等質であるが, 誘導概エルミート構造は等質ではないことが示された.