Riemann 積分の近似和の収束の速さ

田崎博之
筑波大学数理物質科学研究科
tasaki@math.tsukuba.ac.jp

1 導入

Riemann 積分の近似和のうちで Riemann 和と台形和の収束の速さを極限で表現する。講演後、本稿の内容は論文 [4] にまとめた。

1.1 Riemann 積分の近似和

有界閉区間 $[a, b]$ の分割[1]

$$\Delta : a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n = b$$

と $s_{i-1} \leq \xi_i \leq s_i$ を満たす ξ_i をとり、$[a, b]$ 上定義された関数 f の **Riemann 和**を

$$R(f; \Delta, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) f(\xi_i)$$

によって定める。

$$d(\Delta) = \max\{s_i - s_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

によって Δ の**幅** $d(\Delta)$ を定める。関数 f の Riemann 積分を

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Delta)\to 0} R(f; \Delta, \xi_i)$$

によって定める。f が連続関数のときに Riemann 積分が存在することは、微分積分の教科書にはたいてい書かれていることである。さらにいくつかの教科書では Riemann 和の誤差

$$\left| \int_a^b f(x)dx - R(f; \Delta, \xi_i) \right|$$

を n が大きくなると 0 に近づく量によって上から評価している。しかし、この誤差の極限に関する考察はあまりみあたらない。もちろん、n を大きくしたときに誤差は 0 に近づくが、その誤差の n 倍や n^2 倍などが極限を持つ場合がある。そのような結果について Mathsci net で検索してみると、次の Chui [1] の結果のみ発見できた。

[1] 分割の分点の間の不等式に等号を付けたのは、n を決めたときの分割の全体をコンパクトにするためである。

Chui(1971)　$[a,b]$ の n 等分割を D_n で表す。すなわち、D_n の分点は

$$s_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad (1 \le i \le n)$$

である。f'' が存在し有界であり、ほとんどすべての点で連続であるとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2 \left\{ \int_a^b f(x)dx - R\left(f; D_n, \frac{s_{i-1}+s_i}{2}\right)\right\} \\ = \ & \frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)dx = \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a)).\end{aligned}$$

次に下限近似 Riemann 和 $R(f;\Delta,\min)$ について考える。ここで、min は部分区間 $[s_{i-1}, s_i]$ において f の最小値を与える ξ_i をとるものとする。どんな分割 Δ に対しても

$$R(f;\Delta,\min) \le \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ。分割に下限近似 Riemann 和を対応させる関数

$$(s_1, \ldots, s_{n-1}) \mapsto R(f;\Delta,\min)$$

は連続関数になることがわかり、n を固定すると $R(f;\Delta,\min)$ の最大値を与える Δ が存在する。そこで、この最適な分割を $\Delta_n^{\#}$ で表す。この分割は n に対して一意的に定まるとは限らないが、$R(f;\Delta,\min)$ は同じ値になるので、$R(f;\Delta_n^{\#},\min)$ は f と n に対して定まる値になる。この近似和に関して次の結果を得た。

定理 1　f は C^1 級であるとすると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} n \left\{ \int_a^b f(x)dx - R(f;\Delta_n^{\#},\min)\right\} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(x)|^{1/2}dx\right)^2.$$

関数 f の**台形和**を

$$T(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})\frac{1}{2}(f(s_{i-1}) + f(s_i))$$

によって定める。

定理 2　f'' が存在し有界であり、ほとんどすべての点で連続であるとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2 \left\{ \int_a^b f(x)dx - T(f;D_n)\right\} \\ = \ & \frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a)).\end{aligned}$$

台形和の最適分割について考える。

$$(s_1,\dots,s_{n-1}) \mapsto \left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta)\right|$$

は連続関数になることがわかり、n を固定すると $\left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta)\right|$ の最小値を与える Δ が存在する。そこで、この最適な分割を $\Delta_n^{t\#}$ で表す。この分割は n に対して一意的に定まるとは限らないが、上の近似の誤差は同じ値になるので、

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta_n^{t\#})\right|$$

は f と n に対して定まる値になる。この近似和に関して次の結果を得た。

定理 3　f は C^2 級であるとし、$f'' \geq 0$ また $f'' \leq 0$ を仮定すると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left|\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta_n^{t\#})\right| = \frac{1}{12}\left(\int_a^b |f''(x)|^{1/3}dx\right)^3.$$

f が凸ではない場合は関数が近似されていなくても台形和はよい近似になっている可能性があるので、この場合は排除した。

次に述べる曲線の長さと曲面の面積に関する話題は、今回の Riemann 積分の近似和の収束の速さに続いて研究対象にしようと思っている。

1.2　曲線の長さの近似和

曲線の近似折れ線の長さの収束の速さに関して、Gleason は以下の結果を得ている。これは、今回発表している研究を始めるきっかけの一つである。

内積空間 E 内の曲線 $C:[a,b]\to E$ の定義域 $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n = b$$

をとり、$C(s_0), C(s_1), C(s_2), \dots, C(s_{n-1}), C(s_n)$ を順に線分で結んだ折れ線を C の n **近似折れ線**と呼ぶことにする。C が C^1 級の場合に、$d(\Delta)\to 0$ としたときの近似折れ線の長さの極限が存在する。この極限値は $\int_a^b \left|\frac{dC}{dt}\right| dt$ と一致し、C の長さと呼ばれている。これらについては多くの微分積分や幾何学の教科書に書かれている。しかし、この近似折れ線の長さが曲線の長さに収束する速さについて書かれているものはあまりないようである。この収束の速さに関する次の Gleason [3] の結果は、榎本一之さんから 2006 年夏に教えていただいた。

Gleason(1979)　C を内積空間内の C^2 級曲線とする。C の弧長パラメータを s で表し、曲率を $\kappa(s)$ で表す。自然数 n を固定すると、C の最長 n 近似折れ線 P_n が存在する。このとき、C の長さ $L(C)$ の近似 $L(P_n)$ の誤差は次の等式を満たす。

$$\lim_{n\to\infty} n^2(L(C) - L(P_n)) = \frac{1}{24}\left(\int_C \kappa(s)^{2/3}ds\right)^3.$$

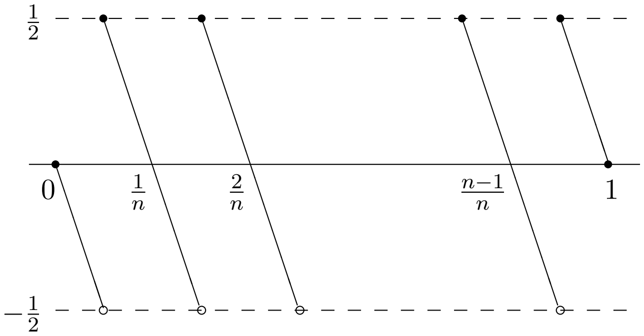
この結果に関連した Riemann 多様体の曲線の長さに関する結果を榎本さんも得ている ([2])。上の定理を示した Gleason は、位相多様体になる位相群は Lie 群になるかという Hilbert の第 5 問題の解決に貢献したことで有名な Gleason である。彼の曲線の長さに関する論文は上の結果を示した論文だけのようで、文献だけみると彼にとっては孤立した研究のようだ。なぜこのような研究を行ったのかも興味が持たれる。

1.3 曲面の曲面積

曲線の長さを折れ線の長さで近似するのと同様に、曲面を三角形の集まりで近似したときの三角形の面積の和で曲面の面積を近似できるかどうかは単純ではない。Schwarz の提灯は三角形を細かくして数を増しても三角形の面積の和は曲面積に必ずしも収束するとは限らないことを示している。三角形の頂点をどのように配置するかも問題である。これらも私にとっての今後の課題である。

2 Chui の定理の証明の概略

話を Riemann 積分の近似和に戻して、Chui の定理の証明の概略を述べることにする。$[a,b]=[0,1]$ の場合を考えれば十分である。次の図のように関数 $v_n(t)$ を定める。



$v_n(t)$ は

$$-\frac{1}{2} < v_n(t) \leq \frac{1}{2}, \qquad v_n(0) = v_n(1) = 0$$

を満たす有界変動関数になる。$[0,1]$ 上の連続関数 f を $v_n(t)$ によって Riemann-Stieltjes 積分すると (以下 R-S 積分と略記する)、次の等式が成り立つ。

$$(*) \qquad \int_0^1 f(t)dv_n(t) = \sum_{k=1} f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) - n\int_0^1 f(t)dt.$$

R-S 積分の定義の復習をしておこう。区間 $[0,1]$ の分割

$$\Delta : 0 = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n = 1$$

に対して $a_{j-1} \leq \xi_j \leq a_j$ をとり

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(v_n(a_j) - v_n(a_{j-1}))$$

によって、R-S 積分の近似和 $\sigma_\Delta(f)$ を定め、$d(\Delta) \to 0$ のときの極限として R-S 積分を定める。上の $v_n(t)$ に対しては R-S 積分を具体的に計算でき、等式 $(*)$ を得る。$(*)$ の両辺を n で割ると

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dv_n(t) = R(f; D_n, \text{中点}) - \int_0^1 f(t)dt$$

となる。R-S 積分に対しても部分積分の公式があり、f が C^1 級のときには、

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dv_n(t) = -\frac{1}{n}\int_0^1 v_n(t)f'(t)dt$$

となる。f'' が存在する場合、右辺をもう一度部分積分することで、$n \to \infty$ の極限を f'' の積分を使って表現できて、望む極限の等式を得る。

3　最適分割による近似和

Gleason [3] が示した次の補題は、最適分割による近似和を扱う際に有用になる。

補題 (Gleason)　$\varphi(t)$ を $[a, b]$ 上定義された 0 以上の値をとる連続関数とする。このとき、任意の自然数 n に対してある分割

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b$$

が存在して、

$$(s_i - s_{i-1}) \max_{[s_{i-1}, s_i]} \varphi(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

がすべて等しくなる。そこでこの等しい値を J_n とおくと、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} nJ_n = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

関数の局所的な性質が関数の定義区間全体での積分という大域的な量に極限を通して結びつくところが、この補題の有用な点である。

C^1 級関数の次の評価は、いくつかの微分積分の教科書で見ることができる。

補題　$[a, b]$ 上定義された C^1 級関数 f に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)\min_{[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

上の不等式の右辺の形は積分とはうまくあわないが、

$$\frac{1}{2}\left((b-a)\max_{[a,b]} |f'(x)|^{1/2}\right)^2$$

とすると区間の長さと関数の値の積が現れる。$|f'(x)|^{1/2}$ に Gleason の補題を適用し、上の不等式を使って評価すると次の不等式を得る。

$$\limsup_{n\to\infty} n\left\{\int_a^b f(x)dx - R(f;\Delta,\min)\right\} \le \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(x)|^{1/2}dx\right)^2.$$

定理 1 を証明するためにはさらに近似和の誤差の下からの評価が必要になる。

補題　$[a,b]$ 上定義された C^1 級関数 f に対して

$$\omega_1(r) = \sup\left\{\big|\,|f'(x)| - |f'(y)|\,\big| \mid x,y\in[a,b],\ |x-y|\le r\right\}$$

とおく。部分区間 $[p,q]\subset[a,b]$ において $f'(x)\neq 0$ ならば、$\xi\in[p,q]$ に対して存在し次の不等式が成り立つ。

$$\left|\int_p^q f(x)dx - (q-p)\min_{[p,q]} f(x) - \frac{1}{2}(q-p)^2|f'(\xi)|\right| \le \frac{1}{2}\omega_1(q-p)(q-p)^2.$$

この補題から局所的な近似和の誤差の下からの評価を得る。それによって定理 1 を証明できる。

定理 2 は Chui の定理の証明と同様の手法で証明することができる。定理 3 については、定理 1 より細かい評価が必要になるが、同様の手法で証明できる。

参考文献

[1] Charles K. Chui, Concerning rates of convergence of Riemann sums, Journal of Approximation Theory, 4 (1971) 279–287.

[2] K. Enomoto, Approximation of length of curves in Riemannian manifolds by geodesic polygons, Yokohama Math. J., 34 (1986) 53–58.

[3] Andrew M. Gleason, A curvature formula, Amer. J. Math., 101 (1979) 86–93.

[4] H. Tasaki, Convergence rates of approximate sums of Riemann integrals, preprint.