BIHARMONIC MAPS AND BI-YANG-MILLS FIELDS

浦川　肇　東北大学大学院情報科学研究科

Abstract. 2-調和写像の概念は１９８３年の Eells – Lemaire の論文にあり、G.Y. Jiang [7] の論文で第１、第２変分公式が示された。独立に、B.Y. Chen [3] の論文によって、ユークリッド空間内の 2-調和部分多様体の概念が導入された。その後、E. Loubeau、S. Montaldo、C. Oniciuc、笹原徹氏らのたくさんの研究がある。この講演では、2-調和写像と 2-ヤング・ミルズ接続について得られた結果を述べる（[6]）。

1. 2 調和部分多様体

今，$f:(M^m,g)\hookrightarrow(\mathbb{R}^n,g_0)$ を等長挿入とし、H を M 上の平均曲率ベクトル場とする。このとき、$H=-\frac{1}{m}\Delta f$ が成り立つ。ここで Δ は (M,g) の正ラプラシアンを表し、$f=(f_1,\cdots,f_n)$ とするとき、$\Delta f=(\Delta f_1,\cdots,\Delta f_n)$ である。

定義 1.1　等長挿入 $f:(M^m,g)\hookrightarrow(\mathbb{R}^n,g_0)$ が 2-**調和** であるとは、$\Delta H=0$、すなわち、$\Delta(\Delta f)=0$ (2-調和の由来はここにある). また、**調和**であるとは、$\Delta f=0$ のとき、すなわち、$H=0$ （極小）となるときをいう。

予想 1.2　(B.Y. Chen) ユークリッド空間内の任意の 2-調和部分多様体は調和、すなわち、極小部分多様体となるであろう。

2. 2-調和写像

さて、 J. Eells – L. Lemaire [5] は次のような汎関数を与え、その臨界点（k-調和写像という）を調べる問題を提出した。

$$E_k(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M\|(d+\delta)^k\|^2v_g. \tag{1}$$

G.Y. Jiang [7] は１９８６年に $k=2$ の場合にこれを調べ、第１変分公式と第２変分公式を求め、また、自明でない例をクリフォード・トーラスで構成した。

初めに、 C^∞-写像 $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ が **調和**であるとは、**エネルギー汎関数** $E(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M|d\varphi|^2v_g$ の臨界点、すなわち、φ の変分

$\varphi_t\colon M \to N$ $(-\epsilon < t < \epsilon)$ ただし $\varphi_0 = \varphi$ に対して、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\varphi_t) = 0 \tag{2}$$

となるときをいう。これはよく知られているように、

$$\tau(\varphi) := \mathrm{Trace}(\nabla d\varphi) = 0 \tag{3}$$

となることと同値である（エネルギー汎関数の**第１変分公式**）。また、**第２変分公式**は次のようになる：$\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ を調和写像とする。このとき、

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} E(\varphi_t) = \int_M \langle J(V), V\rangle v_g, \tag{4}$$

ここで $V(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi_t(x) \in T_{\varphi(x)}N$ $(x \in M)$ であり、したがって $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ であるが、J は**ヤコビ作用素**と呼ばれ、次のように定義されている：

$$J(V) := \overline{\Delta}V - \sum_{i=1}^{m} R^N(V, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i). \tag{5}$$

ここで、$\overline{\Delta}V = -\sum_{i=1}^{m}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i})V$ （粗ラプラシアン）であり、$\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M,g) 上の局所正規直交枠で、R^N は小林・野水式による (N,h) の曲率テンソル場を表す。

定義 2.1 さて、$\varphi\colon M \to N$ の 2-**エネルギー** とは、

$$E_2(\varphi) := \frac{1}{2}\int_M |(d+\delta)^k\varphi|^2 v_g = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g \quad (k=2) \tag{6}$$

をいう。ここで δ は余微分を表す。これは調和写像を零の値（最小値）に取る汎関数である。上式で $k=1$ のときは、$\delta\varphi = 0$ なので、エネルギー汎関数 $E(\varphi)$ となる。

このとき、次が成り立つ。

定理 2.2 (**第１変分公式**)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(\varphi_t) = -\int_M \langle \tau_2(\varphi), V\rangle v_g \tag{7}$$

ここで、 $\tau_2(\varphi) := J(\tau(\varphi))$ である. これから次の定義が導かれる。

定義 2.3　写像 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ が 2-**調和写像** とは、2-エネルギー汎関数 E_2 の臨界点、すなわち、

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= J(\tau(\varphi)) \\ &= \overline{\Delta}(\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^{m} R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

となるときをいう。

系 2.4　$f\colon (M,g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$ を 等長挿入とする。このとき

$$\tau_2(f) = \Delta(\tau(f)) = m\,\Delta H \tag{9}$$

となる。したがって、f が $(\mathbb{R}^n, g_0)$ の 2-調和部分多様体である必要十分条件は、$f\colon (M,g) \to (\mathbb{R}^n, g_0)$ が、定義 2.3 の意味で 2-調和となることである。

定理 2.5　$\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ を C^∞-写像とし、(M,g) はコンパクトなリーマン多様体とする。このとき、

(1) (Jiang)　(M,h) の断面曲率 $Riem^N$ が非正とする。φ が 2-調和と調和であることとは同値である。

(2) (Oniciuc)　(N,h) のリッチ曲率が非正とする。$\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ がリーマン沈め込みのとき、φ が 2-調和 と調和であることとは同値である。

例 2.6 (Jiang) 一般 クリフォード・トーラス $S^p(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^q(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset S^{m+1}(1)$ $(p+q=m)$ とする。$p \neq q$ のとき、これらは極小でない 2-調和部分多様体となる。

次に、第 2 変分公式を示す（Jiang の論文に従う)。

定理 2.7 (**第２変分公式**) $\varphi\colon (M,g)\to(N,h)$ を 2-調和写像とする。このとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} E_2(\varphi_t) &= \int_M \langle J(V), J(V)\rangle v_g \\ &\quad - \int_M \langle V, (\nabla'_{d\varphi(e_i)} R^N)(\varphi(e_i), \tau(\varphi))V \\ &\qquad + (\nabla'_{\tau(\varphi)} R^N)(d\varphi(e_i), V)d\varphi(e_i) \\ &\qquad + R^N(\tau(\varphi), V)\tau(\varphi) \\ &\qquad + 2R^N(d\varphi(e_i), V)\overline{\nabla}_{e_i}\tau(\varphi) \\ &\qquad + 2R^N(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))\overline{\nabla}_{e_i} V\rangle v_g, \qquad (10)\end{aligned}$$

ここで ∇' は (N,h) のレビ・チビタ接続を表し、 $\overline{\nabla}$ は $\varphi^{-1}TN$ 上の誘導接続を表す。

注意 2.8 Jiang の論文は中国語のみの出版であったため、長い間、理解されないままであったようである。

3. 2-調和写像について得られた結果など

定義 3.1 定理 2.7 における第２変分公式を次のように表記しよう。

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} E_2(\varphi_t) = \int_M \langle V, \mathcal{S}_2(V)\rangle v_g \qquad (11)$$

ここで

$$\mathcal{S}_2(V) = J(J(V)) + (10)\ \text{式の残りの項} \qquad (12)$$

とする。このとき、作用素 $\mathcal{S}_2$ は $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ 上に作用する４階の楕円型微分作用素となるので、 $\mathcal{S}_2$ は相異なる固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ を持ち、対応する有限次元固有空間を $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \cdots$ と表記する。このとき、2-調和写像 $\varphi\colon (M,g)\to(N,h)$ の 2-index と 2-nullity が次のように定義される。

$$Index_2(\varphi) := \dim(\bigoplus_{\lambda<0} E_\lambda), \quad Nullity_2(\varphi) := \dim(E_0). \qquad (13)$$

調和写像の index と nullity はそれぞれ、 $Index(\varphi)$ 及び $Nullity(\varphi)$ と記すこととする。このとき、次が成立する。

定理 3.2 任意の調和写像 $\varphi\colon (M,g)\to(N,h)$ は 2-調和であるが、次が成り立つ。

$$Index_2(\varphi) = 0, \quad Nullity_2(\varphi) = Nullity(\varphi). \qquad (14)$$

注意 3.3 最初の等式は明らかである。二番目の等式は、 Oniciuc [11]、[9] らが単位球面の恒等写像に対して示していた。

定理 3.4 $f:(M^m,g)\hookrightarrow S^{m+1}(1)$ を等長挿入で、その主曲率を λ_i $(i=1,\cdots,m)$ とし、 $\lambda_1+\cdots+\lambda_m$ が零でない定数とする。このとき、 f が 2-調和である必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{m} {\lambda_i}^2 = m \tag{15}$$

が成り立つことである。

$\lambda_1+\cdots+\lambda_m=0$ なら、 f は極小挿入である。竹内勝 – 尾関英樹、高木亮一、宮岡礼子氏らが研究の、単位球面内の等径超曲面は、定理 3.4 の仮定を満たす。我々は定理 3.4 を使って、 2-調和だが、極小でない単位球面内の等径超曲面の分類定理を得た。

定理 3.5 $f:(M^m,g)\hookrightarrow S^{m+1}(1)$ が等径超曲面とする。このとき、２－調和なものは次のどれかである。

(1) $M=S^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の小円、Oniciuc の例)

(2) $M=S^{n-p}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $(n-p\neq p-1)$
(クリフォード・トーラス、Jiang の例)

(3) $\varphi:(M,g)\to S^n(1)$ は極小超曲面。

定理 3.6 $f:(M^{2n-1},g)\hookrightarrow \mathbb{C}P^n(c)$ を正則断面曲率が一定値 $c>0$ の複素射影空間への等長挿入とする。第２基本形式 $B(f)$ のトレースが非零一定値とする。このとき、 f が 2-調和となる必要十分条件は $\|B(f)\|^2=\frac{n+1}{2}c$ が成り立つことである。

$B(f)$ のトレースが零なら極小である。高木亮一氏により、$\mathbb{C}P^n(c)$ 内の等質超曲面の分類が知られている。我々は、定理 3.6 を使って、複素射影空間内の等質実超曲面の 2-調和なものの分類定理を得た。また、四元数射影空間内の等質実超曲面についても、2-調和なものの分類定理を得た。

B.Y. Chen の予想に対する部分的解答として次の定理を得た。

定理 3.8 (M,g) を完備リーマン多様体でその断面曲率 $Riem^M$ は有界： $|Riem^M|\le C$ とし、 (N,h) は非正断面曲率 $Riem^N\le 0$ とし、

C^∞-写像 $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ のテンション場 $\tau(\varphi)$ が次を満たすとする：

$$|\tau(\varphi)|\in L^2(M),\quad |\overline{\nabla}\tau(\varphi)|\in L^2(M) \tag{16}$$

とする。　このとき φ が 2-調和であることと調和写像であることとは同値である。

$\varphi:(M,g)\hookrightarrow(N,h)$ が等長挿入のとき、$e(\varphi)=\frac{m}{2}$ なので、(16) を満たす等長挿入については、2-調和であることと極小であることとは同値であり、 B.Y. Chen の予想の部分的な解答が得られたことになる。

4. 2-ヤング・ミルズ接続

今度は、 2-調和写像 のゲージ場の類似物を考えよう。第 1 変分公式は [1] で得られた。初めに、ヤング・ミルズ場の設定を思い起こそう。
コンパクト m-次元リーマン多様体 (M,g) 上の内積 h を持つ階数 r のベクトル束を (E,h) とする。

定義 4.1　$\mathcal{C}(E,h)$ で、E 上の接続 ∇ で、h と適合するもの全体を表す。このとき、 **ヤング・ミルズ汎関数**と呼ばれる $\mathcal{C}(E,h)$ 上の汎関数 $\mathcal{YM}$ が次のように定義される。

$$\mathcal{YM}(\nabla):=\frac{1}{2}\int_M\|R^\nabla\|^2v_g,\quad \nabla\in\mathcal{C}(E,h), \tag{17}$$

ここで

$$R^\nabla(X,Y)s:=\nabla_X(\nabla_Ys)-\nabla_Y(\nabla_Xs)-\nabla_{[X,Y]}s,$$

($s\in\Gamma(E)$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$) とする。また、$F:=\mathrm{End}(E,h)$ とし、$\varphi,\psi\in\Gamma(F)$ に対して、

$$\langle\varphi,\psi\rangle:=\sum_{i=1}^r h(\varphi(u_i),\psi(u_i)),\quad \|\varphi\|^2:=\langle\varphi,\varphi\rangle$$

とする。ただし $\{u_i\}_{i=1}^r$ は E_x $(x\in M)$ の h_x に関する正規直交基底とする。また、$\Omega^k(F):=\Gamma(\bigwedge^kT^*M\otimes F)$ 上の L^2-内積が

$$(\alpha,\beta):=\int_M\langle\alpha,\beta\rangle v_g,\quad \alpha,\beta\in\Omega^k(F)$$

と定義される。ここで

$$\langle\alpha,\beta\rangle:=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\langle\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}),\beta(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\rangle$$

であり、 $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M,g) 上の局所正規直交枠である。各接続 $\nabla\in\mathcal{C}(E,h)$ に対して、外微分 $d^\nabla:\Omega^k(F)\to\Omega^{k+1}(F)$ と余微分 $\delta^\nabla:=$

$(-1)^k * d^\nabla * \colon \Omega^k(F) \to \Omega^{k-1}(F)$ が与えられ、

$$(d^\nabla \alpha, \beta) = (\alpha, \delta^\nabla \beta), \quad \alpha \in \Omega^{k-1}(F),\, \beta \in \Omega^k(F)$$

を満たす。

さて、$C^\infty(M,N)$ 上の k-エネルギー $E_k(\varphi)$ は

$$E_k(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |(d+\delta)^k \varphi|^2 v_g = \frac{1}{2}\int_M |(d+\delta)^{k-1}(d\varphi)|^2 v_g \ (\delta\varphi = 0 \text{ なので})$$

であったので、これと比較して、

$$\mathcal{YM}_k(\nabla) := \frac{1}{2}\int_M \|(d^\nabla + \delta^\nabla)^{k-1} R^\nabla\|^2 v_g \tag{18}$$

を考える。$k = 1, 2$ のときは、第２ビアンキ恒等式 $d^\nabla R^\nabla = 0$ に注意して、

$$\begin{aligned} \mathcal{YM}_1(\nabla) &= \mathcal{YM}(\nabla) = \frac{1}{2}\int_M \|R^\nabla\|^2 v_g, \\ \mathcal{YM}_2(\nabla) &= \frac{1}{2}\int_M \|\delta^\nabla R^\nabla\|^2 v_g \end{aligned} \tag{19}$$

である。$\mathcal{YM}_2$ を、2-**ヤング・ミルズ汎関数** という。

ヤング・ミルズ汎関数の第１、第２変分公式は次のようである ([2])。

定理 4.2 (1) (**第１変分公式**)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{YM}(\nabla^t) = \int_M \langle \alpha, \delta^\nabla R^\nabla \rangle v_g, \tag{20}$$

ここで $\nabla^t \in \mathcal{C}(E,h)$ $(-\epsilon < t < \epsilon)$ は ∇ の $\nabla^0 = \nabla$ となる C^∞-1 係数族で、$\alpha = \frac{d}{dt}|_{t=0}\nabla^t \in \Omega^1(F)$ である。上式が常に零、すなわち、∇ が

$$\delta^\nabla R^\nabla = 0 \tag{21}$$

を満たすとき、**ヤング・ミルズ接続**という。

(2) (**第２変分公式**) $\nabla \in \mathcal{C}(E,h)$ をヤング・ミルズ接続とする。このとき、

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{YM}(\nabla^t) = \int_M \langle J^\nabla(\alpha), \alpha \rangle v_g \tag{22}$$

ここで $J^\nabla(\alpha) := \delta^\nabla d^\nabla \alpha + \mathcal{R}^\nabla(\alpha)$ であり、

$$\mathcal{R}^\nabla(\alpha) := \sum_{j=1}^m [R^\nabla(e_j, X), \alpha(e_j)], \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

とする。ここで $\delta^\nabla \alpha = 0$ に選ぶと、

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{YM}(\nabla^t) = \int_M \langle \mathcal{S}^\nabla(\alpha), \alpha \rangle v_g \tag{23}$$

となる。ここで $\mathcal{S}^\nabla := \Delta^\nabla + \mathcal{R}^\nabla = d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla + \mathcal{R}^\nabla$ である。

さて、2-ヤング・ミルズ汎関数の第１、第２変分公式は次のようになる。

定理 4.3 (1) (**第１変分公式**)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{YM}_2(\nabla^t) = \int_M \langle \alpha, J^\nabla(\delta^\nabla R^\nabla) \rangle v_g, \tag{24}$$

ここで $\alpha = \frac{d}{dt}|_{t=0} \nabla^t \in \Omega^1(F)$ である。上式が常に零、すなわち、∇ が

$$J^\nabla(\delta^\nabla R^\nabla) = 0 \tag{25}$$

を満たすとき、∇ を 2-**ヤング・ミルズ接続**という (J^∇ の定義は定理 4.2 にある。定義からヤング・ミルズ接続は 2-ヤング・ミルズ接続である)。

(2) (**第２変分公式**) $\nabla \in \mathcal{C}(E, h)$ が 2-ヤング・ミルズ接続であるとする。このとき、

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{YM}_2(\nabla^t) &= \int_M \langle J^\nabla(\alpha), J^\nabla(\alpha) \rangle v_g \\ &+ \int_M \langle \alpha, 2\delta^\nabla[\alpha \wedge \delta^\nabla R^\nabla] + \mathcal{R}(d^\nabla \delta^\nabla R^\alpha)(\alpha) \rangle v_g \end{aligned} \tag{26}$$

となる。ここで $\delta^\nabla \alpha = 0$ にとると、

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{YM}_2(\nabla^t) = \int_M \langle \mathcal{S}_2^\nabla(\alpha), \alpha \rangle v_g \tag{27}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2^\nabla(\alpha) := \mathcal{S}^\nabla(\mathcal{S}^\nabla(\alpha)) \\ + 2\delta^\nabla[\alpha \wedge \delta^\nabla R^\nabla] + \mathcal{R}(d^\nabla \delta^\nabla R^\nabla)(\alpha)\end{aligned} \tag{28}$$

であり、$\alpha, \varphi, \psi \in \Omega^1(F)$ と $\eta \in \Omega^2(F)$ に対して、 $[\varphi \wedge \psi] \in \Omega^2(F)$ と $\mathcal{R}(\eta)(\alpha) \in \Omega^1(F)$ は次のように定義される：

$$[\varphi \wedge \psi](X, Y) := [\varphi(X), \psi(Y)] - [\varphi(Y), \psi(X)], \tag{29}$$

$$\mathcal{R}(\eta)(\alpha)(X) := \sum_{j=1}^m [\eta(e_i, X), \alpha(e_i)]. \tag{30}$$

$\mathcal{S}_2^\nabla$ は $\Omega^1(F)$ に作用する４階の楕円型作用素である。不変部分空間 $Ker(\delta^\nabla) \subset \Omega^1(F)$ における $\mathcal{S}_2^\nabla$ の相異なる固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ とし、その固有空間を $E_{\lambda_1}^2, E_{\lambda_2}^2, \cdots$ と表す。そこで

$$Index_2(\nabla) := \dim\Big(\bigoplus_{\lambda<0} E_\lambda^2\Big),\ Nullity_2(\nabla) := \dim(E_0^2) \tag{31}$$

と定義する。また、ヤング・ミルズ接続の Index と Nullity も同様に $\mathcal{S}^\nabla$ を用いて定義されていた ([2])。このとき次が成り立つ。

定理 4.4 任意のヤング・ミルズ接続 ∇ は 2-ヤング・ミルズ接続であり、 $Index_2(\nabla) = 0$ かつ $Nullity_2(\nabla) = Nullity(\nabla)$ が成り立つ。

5. 2-ヤング・ミルズ接続のギャップ現象

今度は、新たに、2-ヤング・ミルズ接続のギャップ現象があることが分かったので、それについて紹介する。これはヤング・ミルズ接続でも同様の事が起きている（[2])。

定理 5.1 （有界ギャップ現象） (M, g) をコンパクトリーマン多様体で、そのリッチ曲率 (リッチテンソル) が下から正の定数 $k > 0$ で、$Ric \geq k\,\mathrm{Id}$ と押さえられているとする。 (M, g) 上に任意のベクトル束 (E, h) を取り、その上の接続 ∇ の曲率テンソル R^∇ のノルムが各点ごとに $\|R^\nabla\| \leq \frac{k}{2}$ と押さえられているとする。

このとき、∇ が 2-ヤング・ミルズ接続であることと ヤング・ミルズ接続であることとは同等である。

注意 5.2 標準球面 $S^m(1)$ のときは、 $k = m - 1$ である。

４次元リーマン多様体の場合には、L_2-ギャップ現象が見つかる。Min-Oo ([10]) と同様のやり方で示される。このために、 $\dim M = 4$ の場合の、等周定数 C を用意する。

$$C := \inf_{W^3 \subset M^4, M \setminus W = M_1 \cup M_2} \frac{Vol(W)^4}{(\min\{Vol(M_1), Vol(M_2)\})^3}, \tag{32}$$

ここで 上記の下限は、M^4 内の超曲面 W のすべてに渡り、 M_1 と M_2 は W の補集合の２つの連結成分を表す。

このとき、次のソボレフの不等式が成立する：

$$\|\nabla f\|_{L^2}{}^2 \geq \frac{\sqrt{C}}{18}\,\|f\|_{L^4}{}^2 - \frac{1}{9}\sqrt{\frac{C}{Vol(M, g)}}\,\|f\|_{L^2}{}^2, \quad f \in H_1^2(M).$$

定理 5.3 （L^2-ギャップ現象）$\dim M = 4$ とし、(M, g) をコンパクトリーマン多様体で、そのリッチ曲率 (リッチテンソル）が下から正の定数 $k > 0$ で、$Ric \geq k\,\mathrm{Id}$ と押さえられているとする。M 上に任意のベクトル束 (E, h) を取り、その上の接続 ∇ の曲率テンソル R^∇ の L^2 ノルムが

$$\|R^\nabla\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \min\left\{\frac{\sqrt{C}}{18}, \frac{k}{2}\sqrt{Vol(M,g)}\right\} \tag{33}$$

を満たすとする。このとき、∇ が 2-ヤング・ミルズ接続であることとヤング・ミルズ接続であることとは同等である。

注意 5.4 定理 5.3 における条件 (33) は、[10] の定理 2 (同論文 157 頁) と同じ条件なので（ただし同論文では $\|R^\nabla_-\|_{L^2}$ だけでやっている)、定理 5.3 から、実は、 ∇ が 2-ヤング・ミルズ接続であることと自己双対（または反自己双対）接続であることとは同等であることが結論される。

References

[1] C.L. Bejan and H. Urakawa, *Yang-Mills fields analogue of biharmonic maps*, In: Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Topics, World Scientific, 2005, 41–49.

[2] J.L. Bourguignon and H.B. Lawson, *Stability and isolation phenomena for yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys., **79** (1981), 189–230.

[3] B. Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., **17** (1991), 169–188.

[4] B. Y. Chen and S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math., **52** (1998), 167–185.

[5] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS, Vol. 50, Amer. Math. Soc., 1983.

[6] T. Ichiyama, J. Inoguchi and H. Urakawa *Biharmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note di Matematica に発表受理, 印刷中.

[7] Jiang Guoying, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas,* **２－調和映照及其第一、二変分公式**, Chinese Ann. Math., 数学年刊, **7A**, **7B**, (4) (1986), 388-402.
浦川肇による英訳（訳注を含む) が、Note di Matematica に発表受理, 印刷中.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry, Vol. II*, 188 頁.

[9] E. Loubeau and C. Oniciuc, *The index of biharmonic maps in spheres*, Compositio Math., **141** (2005), 729–745.

[10] Min-Oo, *An L_2-isolation theorem for Yang-Mills fields*, Compositio Math., **47** (1982), 153–163.

[11] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps into a sphere*, Publ. Math. Debrecen, **61** (2002), 613–622.