３角形の諸心とその不変量

阿賀岡 芳夫　　広島大学理学研究科

０. 幾何学は本来形を扱う学問であったはずだ. ここでは点・直線の次に簡単な図形である「３角形」に関し，ここ数年来私が考察してきた事柄について記しておきたい.

すべての３角形はアフィン変換により互いに移りあえるのでアフィン幾何学の立場から３角形の不変量を考えることに意味はない. しかしユークリッド変換の枠内で考えると事情は異なる. ユークリッド変換で不変な３角形の不変量を求める試みは既にいくつか成されている ([12], [13], [14], [17]).

ここでは３角形そのものの不変量ではなく，３角形の「心」の不変量を導入し,「３角形の幾何学」の一端を紹介したい.

１. いわゆる３角形の５心というものがある. この中で傍心は１つの３角形に対して３つの点を定めるものであるから他の４心とは性格を異にするものであるが，重心・外心・内心・垂心はユークリッド変換・相似変換で不変という顕著な性質をもっている. つまり

定義　写像 φ : $\{\mathbf{R}^2$の３角形$\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ で, ユークリッド変換＋相似変換の作る群の作用と可換なものを心という

とすれば，重心・外心・内心・垂心はもちろんこの意味で心となる. しかし，これでは例えば重心と垂心を **100 : 1** に内分するといった幾何学的に意味があるのかどうか怪しい点までもが心となってしまい，いわゆる常識的な意味での「心」としては，定義が少し広すぎるといえる.

その一方で, C.Kimberling 氏は膨大な数の心の一覧を構成している. ([9] には 400 個の心が紹介されているし，ホームページ [10] には現在 3514 個の心がリストアップされている. 恐ろしいことに, これらはほぼすべて幾何学的に意味のある心であるようなのである.)

心の世界は広い, しかし意味なく広すぎてもいけない. この視点で私はいくつかの「心の族」を構成し, その族のもつ性質を調べてみた.

２. まず記号を定めてゆく. ３角形 ABC において３辺の長さを通常通りに a, b, c とおく. 平面上の任意の点 P は重心座標を用いて一般に

$$P = xA + yB + zC \qquad (x + y + z = 1)$$

と表せるが, ここで $P\,(= \varphi(\Delta ABC))$ が上記の意味での心であれば

$$P = f(a, b, c)A + f(b, c, a)B + f(c, a, b)C$$

の形に表せることがわかる．ただし係数の $f(a,b,c)$ は３辺 a, b, c の関数で, 次の条件を満たしている:

$$\begin{aligned} &f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)=1, \\ &f(a,b,c)=f(a,c,b), \\ &f(ka,kb,kc)=f(a,b,c) \quad {}^{\forall}k>0. \end{aligned}$$

(逆にこの３条件を満たす $f(a,b,c)$ は上記の意味での心を定めることがすぐに確かめられる.) 例えば, よく知られているように重心なら $f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)=\frac{1}{3}$ となり, 内心なら $f(a,b,c)=\frac{a}{a+b+c}$, $f(b,c,a)=\frac{b}{a+b+c}$, $f(c,a,b)=\frac{c}{a+b+c}$ となる．心を定めるには, 明らかに A の係数 $f(a,b,c)$ がわかれば十分であり, また A の係数は一般に分数の形をしているが, その分子さえわかれば, 分母は分子の巡回和として求められる．この意味で, 今後 $f(a,b,c)$ の分子だけを取り出し, それを改めて $f(a,b,c)$ と表すことにする．この記法のもとで, 次のような心の族 $\mathcal{P}$ を導入する:

定義　$\mathcal{P}=\{f(a,b,c)\,|\,f(a,b,c)$ は a,b,c の同次実<u>多項式</u>,
$f(a,b,c)=f(a,c,b)$,
$f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)\neq 0\}/\sim$.
ただし, $f\sim f' \iff f'=f\times(a,b,c$ の対称式$)$ とする．

このとき心 P は $P=\dfrac{f(a,b,c)A+f(b,c,a)B+f(c,a,b)C}{f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)}$ と表される． この形より, $f(a,b,c)$ に a, b, c の対称式を掛けても P はかわらないことがわかる．$\mathcal{P}$ の定義において, 同値関係 $\sim$ で割っているのはそのためである．混乱のおそれはないので今後 $f(a,b,c)$ の属する同値類も同じ記号で表す．($a\sim 2a$ なので, 今後これを $a=2a$ と書く場面もある.)

３． ここで心の次数 $d(f)$ $(f=f(a,b,c)\in\mathcal{P})$ を次のようにして定義する．まず $f(a,b,c)$ は a, b, c の対称式を因子にもたないと仮定しても一般性を失わない．(このとき f は定数倍を除いて一意に定まる.)

ここで写像 $d:\mathcal{P}\longrightarrow\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ を

$$d(f)=\begin{cases} \dfrac{f(1,\omega,\omega^2)}{f(1,1,1)} & f(1,1,1)\neq 0 \\ \infty & f(1,1,1)=0 \end{cases}$$

で定める．ここに ω, $\omega^2=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. ($b$, c は本来は辺の長さを表すが, それを忘れて多項式 f の変数の部分に複素数を代入する．$f(a,b,c)$ は b, c に関して対称なので $d(f)$ は実数値をとる．また比をとっているので f の定数倍の自由度は解消され, $d(f)$ は well defined となる.)

例

- 重心　$f(a,b,c)=1 \implies d(f)=1$
- 内心　$f(a,b,c)=a \implies d(f)=1$
- 外心　$f(a,b,c)=a^2(-a^2+b^2+c^2) \Longrightarrow d(f)=\dfrac{-1+\omega^2+\omega^4}{-1+1+1}=-2$
- 垂心　$f(a,b,c)=(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2) \Longrightarrow d(f)=\dfrac{(1-\omega^2+\omega^4)(1+\omega^2-\omega^4)}{(1-1+1)(1+1-1)}=4$
- ９点円の中心　$f(a,b,c)=a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2 \Longrightarrow d(f)=1$
- ルモアーヌ点　$f(a,b,c)=a^2 \Longrightarrow d(f)=1$
- ジェルゴンヌ点　$f(a,b,c)=(a-b+c)(a+b-c) \Longrightarrow d(f)=4$
- ナゲル点　$f(a,b,c)=-a+b+c \Longrightarrow d(f)=-2$
- ミッテンプンクト　$f(a,b,c)=a(-a+b+c) \Longrightarrow d(f)=-2$
- スピーカー点　$f(a,b,c)=b+c \Longrightarrow d(f)=-\frac{1}{2}$
- フォイエルバッハ点　$f(a,b,c)=(b-c)^2(-a+b+c) \Longrightarrow d(f)=\infty$
- クローソン点　$f(a,b,c)=a(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2) \Longrightarrow d(f)=4$
- ド・ロンシャン点　$f(a,b,c)=3a^4-2a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2 \Longrightarrow d(f)=-8$
- シフラー点　$f(a,b,c)=a(a+b)(a+c)(-a+b+c) \Longrightarrow d(f)=-\frac{1}{2}$

未定義語については [3], [8], [9], [10], [11] 等を参照のこと．一見してわかる通り, $d(f)$ は -2 のべき乗の形をしているものが多い．

4． オイラー線とは, 重心・外心・垂心・９点円の中心を通る直線のことで, 重心を間に挟んでこれらの点はオイラー線上２：１に内分されている．

上で定義した心の次数 $d(f)$ はこのオイラー線を一般化したものと密接な関係のあることがわかった．この事実を説明するために, いくつか言葉の準備をする．

まず, 以下では $f(a,b,c)=f_a$, $f(b,c,a)=f_b$, $f(c,a,b)=f_c$ と略記する．ここで $n \in \mathbf{Z}$ に対して新しい心 $f_n \in \mathcal{P}$ を

$$f_n(a,b,c)=2^n(f_a+f_b+f_c)+(-1)^n(2f_a-f_b-f_c)$$

で定義する．f_n の多項式としての次数は f と同じである．このとき,

$$\begin{aligned}
&f_0=f,\\
&f_1(a,b,c)=f_b+f_c,\\
&f_2(a,b,c)=2f_a+f_b+f_c,\\
&f_{-1}(a,b,c)=-f_a+f_b+f_c,\\
&f_{-2}(a,b,c)=-3f_a+f_b+f_c,\\
&(f_m)_n=f_{m+n}
\end{aligned}$$

等が成り立つ. (前述したように, 定数倍の違いは無視していることに注意.) 特に $(f_1)_{-1} = (f_{-1})_1 = f$ となり, f_1 と f_{-1} とは互いに逆操作を与えている.

次に ΔABC において, AB の中点を C_1, BC の中点を A_1, CA の中点を B_1 とする. 更に A_1B_1 の中点を C_2, B_1C_1 の中点を A_2, C_1A_1 の中点を B_2 とし, この操作を無限に繰り返す. そして新しく得られた 3 角形 $\Delta A_mB_mC_m$ を Δ_m と表すことにする. m が負の場合には, 辺の中点を結んで得られる 3 角形が ΔABC となるような 3 角形を Δ_{-1} と表すことにする. このときも同様の手順で Δ_{-2}, Δ_{-3}, $\cdots$ を順々に定めることができる. このようにして, 大小 3 角形の無限列が得られる.

ここで $f = f(a,b,c) \in \mathcal{P}$ とし, 3 角形 Δ_m において多項式 $f_n(a,b,c)$ の定める心のことを Δ_m の f_n 心とよぶことにする. すると次の定理が成り立つ.

定理　$f(a,b,c) \in \mathcal{P}$ とする.

(1) Δ_m の f_n 心は $m+n$ が一定のときすべて同じ点となる.

(2) ${}^\forall f_n$ 心と重心 G は同一直線上にあり, $f_nG : Gf_{n+1} = 2:1$ がすべての $n \in \mathbf{Z}$ について成立する. (従って $\lim_{n\to\infty} f_n = G$ となる.)

(3) $f(a,b,c)$ が a, b, c の対称式を因子に含まないなら f_n も対称式を因子に含まず,

$$d(f_n) = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n d(f) & \deg f \not\equiv 0 \pmod 3, \\ d(f) & \deg f \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

ここに $\deg f$ は $f(a,b,c)$ の多項式としての次数を表す.

$\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \cup G$ の定める直線を一般化されたオイラー線と呼ぶことにする. この呼び名の正当性は次の例で確認できるであろう.

例　$f(a,b,c) = a^2(-a^2+b^2+c^2)$ とする. この f は外心を表している. このとき計算により

$$f_1 = a^2(b^2+c^2) - (b^2-c^2)^2, \quad f_{-1} = (a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$$

となることがわかり, これらの多項式はそれぞれ 9 点円の中心, 垂心を表す. 定理 (1) より, Δ_0 の f_0 心 (外心) = Δ_{-1} の f_1 心 (9 点円の中心) = Δ_1 の f_{-1} 心 (垂心) となるが, これは図を描けばたちどころに確認できる自明の事実である. 結局のところ, 外心・垂心・9 点円の中心は 名前こそ違うが, 3 角形を大小取り替えただけの違いしかない, 兄弟のような一つの系列に属する心達であることになる. (それぞれの重心座標を睨んでいるだけでは, なかなかこの事実には気付けない.)

もちろんこれらの心と重心は, すべてオイラー線上にある. オイラー線上にある点としては, 通常これらの点だけしか認識されていないようであるが, 上記の定理が示すようにこの直線上には無限個の心が乗っていることになる. そのほとんどすべてには名前がつけられていないが, 重心・外心・垂心・ 9 点円の中心だけでこの連鎖をストップさせることの方が逆によほど不自然なことであるといってよいであろう.

また定理 (3) により, ３節で定義した心の次数 $d(f)$ は一般化されたオイラー線上その心が何番目の点であるかを表す量であるといってよい (ただし, これは $\deg f \not\equiv 0 \pmod 3$ のときの話. $\deg f \equiv 0 \pmod 3$ の場合には, 逆に $d(f)$ は一般化されたオイラー線の不変量を与えていると考えられる.) $d(f)$ はその心のある種の複雑さを表す量といってもよい. 次数 $d(f)$ の意味付けに関しては, 更に深く考察する余地がある.

ここでは例としていわゆるオイラー線を取り上げたが, $f(a,b,c)$ として内心 $f(a,b,c)=a$ の場合に定理を適用すると, ナゲル線と呼ばれるものが得られる. この直線はオイラー線ほどには有名ではないが, 重心と内心とを結ぶ直線であり, この直線上にもスピーカー点・ナゲル点など多くの有名な心が乗っている. 重心・内心・ナゲル点にもオイラー線同様２：１の関係が成り立つことを多くの幾何学者が指摘している (例えば [6], [7], [16] 等).

５. 最後に今後の課題をいくつか列挙しておこう.

• ３角形の心のクラスとしては $\mathcal{P}$ でもまだ広すぎる. 私は論文 [1] で, Ceva 共役・等距離共役の概念をベースにして $\mathcal{P}$ のある部分族 $\mathcal{P}_C$ を構成した. しかし残念ながらその具体的な形についてはまだよくわかっていない. 特に $\mathcal{P}_C$ の元 $f(a,b,c)$ に対しては, 常に $d(f)$ は -2 のべき乗の形をしているであろうと予想しているが, まだ証明できない.

• ３角形の心の不変量を更に多く見つけること. この原稿ではページ数の関係で省略したが, 講演では更に心の二つの不変量 $s(f)$, $e(f)$ を導入し, それらのもつ幾何学的性質について説明した (cf. [1]). $d(f)$ と併せてこれら３つの不変量で $\mathcal{P}_C$ の中の１次式, ２次式で定まる心については幾何学的な状況を完璧に記述できるものと期待しているが, 多項式の次数が上がった場合には, 更に精密化された不変量が必要であると考えられる.

• 幾何学的な状況と不変量との関連. 平面上に任意に３点をとったとき, その３点が一直線上に並ぶ可能性は事実上０であるが, ３角形の心の場合には意外と一直線に並ぶ心の多いことに驚かされる. これは, 心の配置が独立ではなく, ある種何らかの従属性があることを示しているはずであるが, そのしくみが何であるのかまだよく把握できない. おそらくは心の不変量を総動員すれば, その状況が明確に記述できるようになるはずで, この観点から初等幾何学の種々雑多な (ごった煮のような) 事実の山をより高い地点から俯瞰したい, それが現在の私の願いである.

最初に幾何学は形を扱う学問であると言っておきながら, この原稿では結局図を一つも描かず, 代数的な式の取り扱いに終始してしまった. その点忸怩たる思いだが, 図は他人に描いてもらうものではなく自分で描くものだ, と一つ最後に言い訳してこの稿を終える.

References

[1] Y. Agaoka, *Degree of triangle centers and a generalization of the Euler line*, `http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00025256` (広島大学図書館学術情報リポジトリ) から入手可.

[2] C. J. Bradley, *Another line of centres of a triangle*, Math. Gazette, **73** (1989), 44–45.

[3] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Math. Assoc. America, Washington, 1967.

[4] D. R. Dickinson and W. S. Wynne-Willson, *Lines associated with a triangle*, Math. Gazette, **45** (1961), 47–48.

[5] J. Dixmier, J. P. Kahane and J. L. Nicolas, *Un exemple de non-dérivabilité en géométrie du triangle*, Enseign. Math., **53** (2007), 369–428.

[6] D. B. Eperson, *The Euler line and the Eperson line*, Math. Gazette, **80** (1996), 239.

[7] D. R. Hofstadter, *Discovery and dissection of a geometric gem*, in Geometry Turned On!, (eds. J. R. King, D. Schattschneider), 3–14, Math. Assoc. Amer., Washington, 1997.

[8] R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1995.

[9] C. Kimberling, *Triangle Centers and Central Triangles*, Congressus Numerantium, **129**, Utilitas Math. Publ. Incorp., Winnipeg, 1998.

[10] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, available at `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

[11] T. Lalesco, *La Géométrie du Triangle*, Éditions Jacques Gabay, 2003.

[12] J. A. Lester, *Triangles* I: *Shapes*, Aeq. Math., **52** (1996), 30–54.

[13] J. A. Lester, *Triangles* II: *Complex triangle coordinates*, Aeq. Math., **52** (1996), 215–245.

[14] J. A. Lester, *Triangles* III: *Complex triangle functions*, Aeq. Math., **53** (1997), 4–35.

[15] M. Longuet-Higgins, *A fourfold point of concurrence lying on the Euler line of a triangle*, Math. Intelligencer, **22** no.1 (2000), 54–59.

[16] M. S. Longuet-Higgins, *On the principal centers of a triangle*, Elemente Math., **56** (2001), 122–129.

[17] H. Nakamura and K. Oguiso, *Elementary moduli space of triangles and iterative processes*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **10** (2003), 209–224.

[18] E. Snapper, *An affine generalization of the Euler line*, Amer. Math. Monthly, **88** (1981), 196–198.