回転体の表面積と体積の近似

五来結里子
（筑波大学大学院数理物質科学研究科博士前期課程２年）

この研究は, 筑波大学の田崎博之先生と筑波大学博士前期課程１年の山川美緒さんとの共同研究に基づくものである。

ショートコミュニケーションのときには, 回転体の表面積の誤差の絶対値に n をかけたものの上極限を上から押さえた結果を発表したが, その後の研究の進展で, より精密な結果が得られたので, ここではそのより精密な結果を紹介する。

1　表面積の近似

主張したい定理は次である。

定理 1.1 (x, y) 平面の中の C^4 級の曲線 $y = f(x)$ $(f > 0,\ a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りに回転させた回転面の表面積を S とする。Δ_n^e を $[a, b]$ の n 等分割, 分割点 s_i $(0 \leq i \leq n)$ に対応する $f(s_0), f(s_1), \cdots, f(s_n)$ を順に線分で結んだ折れ線を x 軸の周りに回転させた円錐台の表面積の和を $S(\Delta_n^e)$ とする。
$\varphi(x) = -\dfrac{1}{2}f''(x)\{(f'(x))^2+1\}^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4}f(x)(f''(x))^2\{(f'(x))^2+1\}^{-\frac{3}{2}}$ とするとき,

$$\limsup_{n\to\infty}\ n^2|S - S(\Delta_n^e)| \leq \frac{\pi}{3}(b-a)^3 \max_{[a,b]}|\varphi|$$

2　定理の証明

(x, y) 平面の中の C^4 級の曲線 $y = f(x)$ $(f > 0,\ a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りに回転させた回転面の表面積 S は

$$S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{(f')^2+1}\ dx$$

と表される。$[a, b]$ の n 等分割 Δ_n^e に対して決まる近似和 $S(\Delta_n^e)$ は,

$$S(\Delta_n^e) = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(s_{i-1}) + f(s_i)}{2}\sqrt{\left(\frac{f(s_i) - f(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}}\right)^2 + 1}\ (s_i - s_{i-1})$$

となる。まず, 部分区間 $[p,q]\subset[a,b]$ における回転面の表面積とその近似の誤差を評価する。その誤差を 2π で割ったものを $F(p,q)$ とする。すなわち

$$F(p,q):=\int_p^q\left[f(x)\sqrt{(f'(x))^2+1}-\left(f(p)+\frac{f(q)-f(p)}{q-p}(x-p)\right)\sqrt{\left(\frac{f(q)-f(p)}{q-p}\right)^2+1}\,\right]dx$$

とおく。計算により,

$$F(p,p)=0,\quad \left.\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}\right|_{q=p}=0,\ \left.\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}\right|_{q=p}=0,$$

となることがわかるので, Taylor の定理よりある $p<c<q$ が存在して

$$F(p,q)=\left.\frac{\partial^3 F(p,q)}{\partial q^3}\right|_{q=p}\frac{(q-p)^3}{3!}+\left.\frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=c}\frac{(q-p)^4}{4!}$$

と書くことができる。３階微分を $\varphi(p)$ とおくと,

$$\varphi(p)=\left.\frac{\partial^3 F(p,q)}{\partial q^3}\right|_{q=p}=-\frac{1}{2}f''(p)\{(f'(p))^2+1\}^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}f(p)(f''(p))^2\{(f'(p))^2+1\}^{-\frac{3}{2}}$$

となり, さらに $\left|\left.\frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=c}\right|\le M_{p,q}$ ($M_{p,q}$ は $f,f',f'',f^{(3)},f^{(4)}$ からなる量の $[p,q]$ での最大値) であることがわかるので,

$$\begin{aligned}|F(p,q)|&\le\left|\left.\frac{\partial^3 F(p,q)}{\partial q^3}\right|_{q=p}\right|\frac{(q-p)^3}{3!}+\left|\left.\frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=c}\right|\frac{(q-p)^4}{4!}\\&\le\max_{[p,q]}|\varphi|\frac{(q-p)^3}{3!}+M_{p,q}\frac{(q-p)^4}{4!}\end{aligned}$$

以上の局所的誤差の評価を用いて, 全体区間 $[a,b]$ での $|S-S(\Delta_n^e)|$ の上からの評価を求める。

$$\begin{aligned}n^2|S-S(\Delta_n^e)|&\le n^2 2\pi\sum_{i=1}^n|F(s_{i-1},s_i)|\\&\le 2\pi\ \frac{1}{3!}\max_{[a,b]}|\varphi|\ \ n^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{b-a}{n}\right)^3+n^2 2\pi\sum_{i=1}^n M_{a,b}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4\\&=\frac{\pi}{3}\ (b-a)^3\max_{[a,b]}|\varphi|+2\pi M_{a,b}\ \frac{(b-a)^4}{n}.\end{aligned}$$

以上より,

$$\limsup_{n\to\infty}n^2|S-S(\Delta_n^e)|\le\frac{\pi}{3}\ (b-a)^3\max_{[a,b]}|\varphi|$$

となって定理の結論を得る。

回転体の表面積の近似に関する研究は現在も進展中であり, 凸回転体の場合はよりよい評価が得られた。これらについては三人の共著論文にまとめる予定である。

3　体積の近似

関数のリーマン積分の近似和の収束の速さに関する以下の結果を利用して得られる回転体の体積の近似和の誤差について述べる。以後, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ とする。

Chui[1] の結果 f'' : 存在, 有界, ほとんどすべてで連続, $\Delta_n^e:[a,b]$ の n 等分割

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)dx - R\left(f;\Delta_n^e,\ \frac{s_{i-1}+s_i}{2}\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)dx.$$

Tasaki[2] の結果 f'' : 存在, 有界, ほとんどすべてで連続, $\Delta_n^e:[a,b]$ の n 等分割

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)dx - T(f;\Delta_n^e)\right] = -\frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx.$$

Tasaki[2] の結果 $f:C^1$ 級関数, $\Delta_n^\sharp$: 下限リーマン和に対する最適分割

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)dx - R(f;\Delta_n^\sharp,\min)\right] = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2.$$

ただし, $R(f;\Delta_n,s_i)=\sum_{i=1}^n (s_i-s_{i-1})f(s_i)$, $T(f;\Delta_n)=\sum_{i=1}^n \frac{(s_i-s_{i-1})(f(s_{i-1})+f(s_i))}{2}$ とする。これらの結果を f^2 に適用すると, 体積とその近似和の誤差の評価が得られる。f を x 軸の周りに回転させた回転体の体積 V は,

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx.$$

f'' : 存在, 有界, ほとんどすべてで連続, $\Delta_n^e:[a,b]$ の n 等分割とするとき

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[V-\pi R\left(f^2;\Delta_n^e,\ \frac{s_{i-1}+s_i}{2}\right)\right] = \frac{\pi(b-a)}{12}(f(b)f'(b)-f(a)f'(a)).$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[V-T(f^2;\Delta_n^e)\right] = -\frac{\pi(b-a)^2}{6}(f(b)f'(b)-f(a)f'(a))+\frac{\pi(b-a)^2}{6}\int_a^b (f'(x))^2dx.$$

また $f:C^1$ 級関数, $\Delta_n^\sharp: f^2$ の下限リーマン和に対する最適分割とするとき

$$\lim_{n\to\infty} n\left[V-R(f^2;\Delta_n^\sharp,\min)\right] = \pi\left(\int_a^b |f(x)f'(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2.$$

参考文献

[1] Charles K.Chui, Concerning rates of convergence of Riemann sums, Journal of Approximation Theory 4 (1971) 279–287.

[2] Hiroyuki Tasaki, Convergence rates of approximate sums of Riemann integrals, to appear in Journal of Approximation Theory, DOI :10.1016/ j.jat.2008.10.005