

曲線の長さの近似

(ショートコミュニケーション)

池田未央

筑波大学数理物質科学研究科

私は田崎博之先生との共同研究で曲線の長さを円弧折れ線の長さで近似する研究を行っている。

ショートコミュニケーションでは曲線の長さの n 円弧折れ線の長さによる近似の誤差に n^3 をかけたものの上極限が上から押さえられることを述べたが、その後の研究の進展で、 n^4 をかけたものの上極限が上から押さえられることがわかったので、これについて述べる。

まず、研究の参考にした折れ線の長さで曲線の長さを近似している Gleason の結果を紹介する。

定理 1 (Gleason [1]) X を Euclid 空間内の C^2 級曲線として、 X の長さを $L(X)$ 、弧長パラメータを s 、曲率を $\kappa(s)$ で表す。自然数 n に対して X の最長 n 近似折れ線を P_n とすると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(L(X) - L(P_n)) = \frac{1}{24} \left(\int_X \kappa(s)^{2/3} ds \right)^3.$$

この折れ線による長さの近似よりも、円弧をつないだ円弧折れ線による長さの近似の方が精度が高くなると思われ、円弧折れ線による近似を研究するに至った。円弧折れ線の設定は次のようなものである。

$x(s)$ を Euclid 空間内の曲線の弧長パラメータ表示とし、定義域を閉区間 $[a, b]$ とする。 Δ を $[a, b]$ の任意の分割とし、その分点を

$$a = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = b$$

とする。そのとき、曲線上の 3 点 $x(s_{i-1})$, $x(\frac{s_{i-1}+s_i}{2})$, $x(s_i)$ を通る円弧を $A(\Delta, i)$ で表し、 $A(\Delta, i)$ を $i = 1$ から n までつなげた円弧折れ線を $A(\Delta)$ で表す。この設定の下、次の定理が成り立つことが分かった。

定理 2 X を Euclid 空間内の C^5 級曲線として、 X の長さを $L(X)$ で表す。 $[a, b]$ の n 等分割を Δ_n^e で表すと、次の不等式が成り立つ。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^4 |L(X) - L(A(\Delta_n^e))| \leq JL(X)^5.$$

ここで J は曲線 X によって決まる定数である。

この定理は曲線の長さとの近似の長さの誤差に n^4 を掛けたものの上極限が有界になるという主張であり、Gleason の定理よりも誤差の評価の精度は上がったといえる。

以下では、上記の定理の証明の概略を述べる。局所的な曲線の長さとの三点を通る円弧の長さの誤差の評価をし、それを利用して全体の誤差を評価する。

まず局所的な誤差の評価を考える。 x の定義域を $[s - h, s + h]$ に制限した曲線 X の部分曲線を Y とし、 $C(Y) = |x(s + h) - x(s - h)|$ とおく。さらに、 $A(h)$ は3点 $x(s - h), x(s), x(s + h)$ を結ぶ円弧とし、その円弧 $A(h)$ の半径を $r(h)$ とする。初等幾何学的考察、正弦定理と \sin^{-1} の展開を使うと、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} & L(Y) - L(A(h)) \\ = & L(Y) - C(Y) - \frac{1}{24} \frac{C(Y)^3}{r^2(h)} - 2S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h), \\ & \sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + S(x). \end{aligned}$$

上の等式の右辺の各項は Taylor 展開を使うことによって h の冪で表現できる。

$$\begin{aligned} C(Y) &= 2h - \frac{1}{3} |x''(s)|^2 h^3 + w_1(h) h^5, \quad |w_1(h)| \leq W_1 \\ C(Y)^3 &= 8h^3 + w_2(h) h^5, \quad |w_2(h)| \leq W_2 \\ \frac{1}{r^2(h)} &= |x''(s)|^2 + w_3(h) h^2, \quad |w_3(h)| \leq W_3 \end{aligned}$$

ここで、 W_1, W_2, W_3 は曲線 X によって決まる定数である。

$2 \left| S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h) \right|$ の評価は

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + S(x)$$

から、 $0 < r < 1, |x| < r \Rightarrow |S(x)| \leq \sigma_r |x|^5$ と評価できることを使う。ここで、 σ_r は r に依存する定数であることに注意する。これを適用すると、 $0 < r < 1, \frac{C(Y)}{2r(h)} < r$ のとき

$$2 \left| S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h) \right| \leq 2\sigma_r \left| \frac{C(Y)}{2r(h)} \right|^5 r(h) \leq W_4 L(Y)^5$$

と評価でき、 W_4 は曲線 X によって決まる定数である。

以上の評価を $L(Y) - L(A(h))$ の式に代入すると、

$$\begin{aligned} & L(Y) - L(A(h)) \\ = & L(Y) - C(Y) - \frac{1}{24} \frac{C(Y)^3}{r^2(h)} - 2S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h) \\ = & 2h - \left\{ 2h - \frac{1}{3} |x''(s)|^2 h^3 + w_1(h) h^5 \right\} \\ & - \frac{1}{24} \left\{ 8h^3 + w_2(h) h^5 \right\} \cdot \left\{ |x''(s)|^2 + w_3(h) h^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h) \\
= & w_5(h)L(Y)^5 - 2S \left(\frac{C(Y)}{2r(h)} \right) r(h), \\
& |w_5(h)| \leq W_5
\end{aligned}$$

ここで、 W_5 は曲線 X によって決まる定数である。
よって、

$$\begin{aligned}
|L(Y) - L(A(h))| & \leq W_5 L(Y)^5 + W_4 L(Y)^5 \\
& = JL(Y)^5
\end{aligned}$$

と評価でき、 J は曲線 X によって決まる定数である。この部分的な評価を用いて、全体の曲線の評価すると、

$$\begin{aligned}
|L(X) - L(A(\Delta_n^e))| & \leq \sum_{i=1}^n |L(x|_{[s_{i-1}, s_i]}) - L(A(\Delta_n^e, i))| \\
& \leq \sum_{i=1}^n J(s_i - s_{i-1})^5 \\
& = \sum_{i=1}^n J \left(\frac{b-a}{n} \right)^5 = J(b-a)^5 \left(\frac{1}{n} \right)^4.
\end{aligned}$$

よって、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^4 |L(X) - L(A(\Delta_n^e))| \leq JL(X)^5.$$

参考文献

- [1] Andrew M. Gleason, A curvature formula, Amer. J. Math. 101 (1979) 86–93.