# $S^2 \times S^2$ のタイトラグランジュ曲面の分類とその大域的タイト性

入江　博

東京電機大学未来科学部

本稿では, エルミート対称空間内のタイトラグランジュ部分多様体の概念を紹介し, 複素射影空間の場合の Oh [6] の分類結果, 及び酒井高司氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究 [3] により得られた $S^2(1) \times S^2(1)$ の場合の分類結果について説明する.

## 1　定義と複素射影空間の場合の分類結果

Y.-G. Oh は論文 [6] において, エルミート対称空間内のラグランジュ部分多様体に対して, 次のようなタイト性の概念を導入した.

**定義 1.** $(M = G/H, \omega, J)$ をコンパクト型エルミート対称空間, $L$ を $M$ の埋め込まれたコンパクトラグランジュ部分多様体とする. $L$ と $gL$ が横断的に交わるような $M$ の任意の正則等長変換 $g \in G$ について

$$\#(L \cap gL) = SB(L, \mathbb{Z}_2) \tag{1}$$

が成り立つとき, $L$ は**大域的にタイト** (globally tight) であるという. ここで, $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は $L$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数のベッチ数の和を表す.

また, 恒等変換に近い $g \in G$ で $L$ と $gL$ が横断的に交わるものについて常に (1) が成り立つとき, $L$ は**タイト** (tight) であるという.

エルミート対称空間の実形はタイトになることが知られている (竹内-小林 [7]). Oh は, $M = \mathbb{C}P^n$ の場合にタイトなラグランジュ部分多様体を決定した. 以下, ラグランジュ部分多様体 $L$ は連結, コンパクトで埋め込まれたものとする.

**定理 2** (Oh [6])**.** $L$ を $\mathbb{C}P^n$ のタイトなラグランジュ部分多様体とする. このとき, $n \geqq 2$ ならば $L$ は全測地的な実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と合同となり, $n = 1$ のときは $\mathbb{C}P^1 \cong S^2(1)$ の大円 ($\cong \mathbb{R}P^1$) または小円のいずれかになる.

ここで, 小円は, それと平行な軸のまわりに $S^2$ を半回転させると交わりがなくなるので大域的にタイトではない. 一方, $\mathbb{C}P^n \supset \mathbb{R}P^n$ については次の結果が知られている.

**定理 3** (Howard [2], p.26-27)**.** $\mathbb{C}P^n$ の全測地的な実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は大域的にタイトである.

**注 4.** Howard は, もともと $\mathbb{C}P^n$ のラグランジュ部分多様体に対する積分幾何の Poincaré 公式の普遍定数を具体的に決めるためにこの結果を導いている. ところが, Howard の証明法は $\mathbb{C}P^n$ の場合しか機能しない. 後に $Q_n(\mathbb{C})$ の場合を少し言及するが, 我々の証明には Poincaré 公式 (とアーノルド予想) を用いる.

これらの結果により, $\mathbb{C}P^n$ の大域的にタイトなラグランジュ部分多様体は実形に限ることがわかった. そこで, 次の問題を考えるのは自然であろう.

**問題 5** (Oh [6])**.** $\mathbb{C}P^n$ 以外のエルミート対称空間内のタイトなラグランジュ部分多様体を分類せよ. とくに, 大域的にタイトなものは実形に限るか？

## 2 $S^2 \times S^2$ の場合の分類結果

ここでは, 問題 5 について現在得られている唯一の結果である $M = S^2(1) \times S^2(1)$ の場合を紹介する.

**定理 6** ([3])**.** $L$ を $(S^2 \times S^2, \omega_0 \oplus \omega_0)$ のタイトなラグランジュ曲面とする. ここで, $\omega_0$ は $\mathbb{C}P^1 \cong S^2(1)$ となるような標準的なケーラー形式とする. このとき, $L$ は次のいずれかと合同になる:

(i) 全測地的なラグランジュ球面

$$\{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}.$$

(ii) $S^2(1)$ 内の大円または小円の直積

$$S^1(a) \times S^1(b) \subset S^2(1) \times S^2(1).$$

ここで, $0 < a, b \leqq 1$ である.

この中から大域的にタイトなものを選び出すのが次の作業になる. (ii) の場合は, $a = b = 1$ のときに限り大域的にタイトになることは自明である. $S^2(1)$ の場合の大円と小円の関係と同じである. ところが, (i) については少々議論が必要になる.

**定理 7** ([3])**.** $S^2(1) \times S^2(1) \cong Q_2(\mathbb{C})$ の全測地的ラグランジュ球面

$$\{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}$$

は大域的にタイトである.

**注 8.** 証明には, $S^2(1) \times S^2(1)$ の実形に対する Poincaré 公式とアーノルド予想を用いる. この方法はより高次元の複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の場合にも適用可能と思われる. 現在のところ, $Q_3(\mathbb{C})$ の実形 $(S^1 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ が大域的にタイトであるところまで示せている.

以上で, $S^2(1)\times S^2(1)$ のタイトなラグランジュ曲面および大域的にタイトなラグランジュ曲面の分類が完成し, 大域的にタイトなものは実形に限ることがわかった.

講演では, 主定理 (定理 6) の証明の全体像と定理 7 の証明の概略を説明した. 本稿では, 対称空間内の部分多様体論の観点から重要性が高いと思われるキリング退化次数が小さい場合の $L$ を決定する議論に絞って説明したい. この議論は他の文脈でも有用ではないかと思われるためである. とくに, 後藤享氏 [1] が十年ほど前に極小部分多様体の退化次数の研究のために導入した不等式が威力を発揮する.

## 3　$S^2\times S^2$ のキリング退化次数が小さいラグランジュ曲面

定理 6 の証明の方針は, ラグランジュ曲面 $L$ のキリング退化次数 $\mathrm{nul}_K(L)$ に着目することである. $\mathrm{nul}_K(L)\geqq 5$ のときは, Kuiper [4] によるユークリッド空間へのタイト写像の理論を用いて, $L$ が定義 1 の意味でタイトでないことが示される.

以下, $\mathrm{nul}_K(L)$ が小さい場合：$\mathrm{nul}_K(L)=3,4$ の場合に, 具体的に $L$ を決定する.

**定義 9.** $M$ をリーマン多様体とし, $L$ をその部分多様体とする. $M$ のキリングベクトル場全体のなすリー環を $\mathfrak{i}(M)$ で表す. このとき, $\mathfrak{i}(M)$ の部分空間

$$\mathfrak{i}(M)^{NL}:=\{Z^{NL}\in\Gamma(NL)\mid Z\in\mathfrak{i}(M)\}$$

の次元を $L$ の**キリング退化次数**といい, $\mathrm{nul}_K(L)$ と表す.

各点 $p\in L$ に対して, 線形写像 $\Phi_p:\mathfrak{i}(M)^{NL}\to N_pL\oplus\mathrm{Hom}(T_pL,N_pL)$ を

$$\Phi_p(Z^{NL}):=(Z_p^{NL},\nabla^{NL}Z^{NL})$$

により定義する. ここで, $\nabla^{NL}$ は法ベクトル束 $NL$ 上の法接続を表す. 定義より明らかに $\mathrm{nul}_K(L)\geqq\dim\mathrm{Im}\Phi_p$ が成り立つが, $M$ が対称空間の場合には, この右辺をリー環の言葉で記述することができる.

$(G,H)$ をリーマン対称対とする。$G$ と $H$ のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ と表し, $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\tilde{\mathfrak{m}}$ で表す. このとき, $\tilde{\mathfrak{m}}$ は対称空間 $G/H$ の原点 $o=H$ における接空間 $T_o(G/H)$ と自然に同一視される. $L$ を対称空間 $G/H$ の部分多様体とする. $L$ は原点 $o=H$ を含んでいると仮定してよい. このとき, $\tilde{\mathfrak{m}}$ は $\tilde{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^\perp$ のように $L$ の接空間 $T_oL$ に対応する部分空間 $\mathfrak{m}$ と法空間 $N_oL$ に対応する部分空間 $\mathfrak{m}^\perp$ に直交直和分解されるので, $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^\perp$$

と直交直和分解される. この記号の下で, 線形写像 $\Psi_2:\mathfrak{g}\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{m},\mathfrak{m}^\perp)$ を

$$\Psi_2(Z)(X):=(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Z_{\mathfrak{h}})X)^\perp-B(X,Z_{\mathfrak{m}})\qquad(X\in\mathfrak{m})$$

によって定義する. ここで, $B$ は $L$ の $o$ における第二基本形式に対応する対称双線形写像 $B:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}^\perp$ を表す.

後藤氏による次の不等式が我々の議論の鍵である.

**定理 10** (Gotoh [1])**.** $M = G/H$ をリーマン対称空間, $L$ をその連結コンパクトな部分多様体とすると,

$$\mathrm{nul}_K(L) \geqq \mathrm{codim} L + \dim \mathrm{Im}(\Psi_2|_{\mathfrak{h}}) \tag{2}$$

が成り立つ. さらに, 等号が成立すれば $L$ は等質である.

この結果を $M = S^2(1) \times S^2(1)$ の場合に適用したい.

$$G/H = (SO(3) \times SO(3))/(SO(2) \times SO(2))$$

と表す. この場合には不等式 (2) の右辺を下から評価することができる.

**命題 11** ([3])**.** $S^2(1) \times S^2(1)$ のラグランジュ曲面 $L$ について

$$\mathrm{nul}_K(L) \geqq \mathrm{codim}(L) + \dim \mathrm{Im}(\Psi_2|_{\mathfrak{h}}) \geqq 3 \tag{3}$$

が成り立つ. さらに, 2 番目の等号が任意の点 $p \in L$ で成立する (ただし, $p$ を $G$ の作用により原点 $o$ に移して考える) ための必要十分条件は $L$ が全測地的ラグランジュ球面と合同になることである.

さて, 分類に入る. まず, 上の命題からただちに次を得る.

**系 12.** $S^2(1) \times S^2(1)$ のラグランジュ曲面 $L$ で $\mathrm{nul}_K(L) = 3$ となるものは全測地的なラグランジュ球面 $\{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}$ と合同なものに限る.

次に, $\mathrm{nul}_K(L) = 4$ であると仮定する. このとき $L$ は全測地的なラグランジュ球面と合同ではないので, 不等式 (3) より $L$ 上のある点に対して

$$4 = \mathrm{nul}_K(L) \geqq \mathrm{codim}(L) + \dim \mathrm{Im}(\Psi_2|_{\mathfrak{h}}) \geqq 4$$

が成り立つ. 今度は, 1 番目の等号が成立するので, 定理 10 より $L$ は等質ラグランジュ曲面になる. 複素 2 次超曲面の等質ラグランジュ部分多様体は, 最近大仁田先生と Hui Ma 氏の共同研究により分類がされている. ここでは, 我々に必要な部分だけ引用する.

**命題 13** (Ma-Ohnita [5])**.** $S^2(1) \times S^2(1)$ 内のコンパクト等質ラグランジュ曲面は全測地的なラグランジュ球面

$$M_0 := \{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}$$

または大円および小円の直積で与えられるラグランジュトーラス

$$T_{a,b} := S^1(a) \times S^1(b) \subset S^2(1) \times S^2(1)$$

のいずれかと合同になる。

この結果と $\mathrm{nul}_K(M_0) = 3,\ \mathrm{nul}_K(T_{a,b}) = 4$ であることから, 次を得る.

**系 14.** $S^2(1) \times S^2(1)$ 内のラグランジュ曲面 $L$ で $\mathrm{nul}_K(M) = 4$ となるものは, 大円および小円の直積で与えられるラグランジュトーラス $T_{a,b}$ と合同になる.

以上より, $S^2(1) \times S^2(1)$ のタイトラグランジュ曲面は, $M_0$ および $T_{a,b}$ のいずれかに限ることがわかった. ここで, $T_{a,b}$ がタイトであることは明らかである. $M_0$ は定理 7 により実際にはより強く大域的にタイトである. これで定理 6 の証明が完成する.

最後に, より高次元の $Q_n(\mathbb{C})$ や他のエルミート対称空間の場合への一般化について言及したい. $Q_2(\mathbb{C})$ の方法をそのまま拡張することはまず絶望的である (Kuiper の理論から引き出せる情報が少ないため). しかし, 定理 6 の証明の過程で等質なラグランジュ部分多様体があぶりだされてきたことから, 次の問題が解決すればかなり見通しが良くなると思われる.

**問題 15** (入江-酒井)**.** コンパクト型エルミート対称空間内のタイトなラグランジュ部分多様体は等質であるか？

# 参考文献


[1] T. Gotoh, *The nullity of a compact minimal real hypersurface in a quaternion projective space*, Geom. Dedicata **76** (1999), 53–64.

[2] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).

[3] H. Iriyeh and T. Sakai, *Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$*, arXiv/0809.1536.

[4] N. H. Kuiper, *Minimal total absolute curvature for immersions*, Invent. Math. **10** (1970), 209–238.

[5] H. Ma and Y. Ohnita, *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres*, to appear in Math. Z.

[6] Y.-G. Oh, *Tight Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$*, Math. Z. **207** (1991), 409–416.

[7] M. Takeuchi and S. Kobayashi, *Minimal embeddings of R-symmetric spaces*, J. Differ. Geom. **2** (1968), 203–215.



H. Iriyeh
School of Science and Technology for Future Life
Tokyo Denki University
Kanda-Nishiki-Cho, Chiyoda-Ku
Tokyo, 101-8457
Japan
*e-mail* : hirie@im.dendai.ac.jp