ガウス写像の除外値問題とその周辺の問題について

九州大学大学院数理学研究院 川上 裕* （Kawakami Yu）

2008 年 11 月 27 日，部分多様体論・湯沢 2008

概 要

本稿では，講演者たちがこれまで得てきた，曲面の Gauss 写像の除外値問題に関する結果について，その研究の歴史や着想に至った経緯などを交えて紹介する．

1 序：Gauss 写像の除外値問題の歴史

曲面の Gauss 写像の除外値問題の研究は，極小曲面論でよく知られている Bernstein の定理の幾何的意味付けから始まる．Bernstein の定理とは,「平面全体で定義された 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内のグラフ型極小曲面は平面のみである.」という結果で，極小曲面を表す偏微分方程式が非線形楕円型であることから，この視点から見れば非自明な結果であるが，Gauss 写像という視点から見れば，この曲面が放物型であることを示すことで，Gauss 写像は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とみなすことができ，またグラフ型曲面の Gauss 写像の像は半球面内に含まれてしまうことから，この結果が函数論における Liouville の定理の帰結であることがわかる．この対応から，Nirenberg は $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値問題において，1 変数有理型関数の値分布論の結果に対応した予想を立てた（これは「Nirenberg 予想」と呼ばれていた）．この予想は，その後 Osserman [11] や Xavier [19] を経て，藤本坦孝氏 [2] によって,「Gauss 写像が 5 点以上の除外値をもつ完備極小曲面は平面である.」という最良の結果が示された．また，この結果を応用することで 3 次元双曲型空間の完備な平均曲率が 1 の曲面（CMC-1 曲面）の双曲的 Gauss 写像についても同様の結果を Z.Yu 氏によって得られた [20]．一方，代数的極小曲面（有限絶対全曲率完備極小曲面のこと）の Gauss 写像については，Osserman により非平坦なものの除外値数は高々3 であることが示されている [12] が，この評価が最良であるかどうかは現在のところわかっていない．除外値数が 2 の例は幾つか存在するので，多くの研究者によって「この場合の除外値数の評価は 2 以下に改良できるのではないか？」と予想されている．また，有理型関数の Nevanlinna 理論のような値分布論的性質を統一的に説明できる理論が Gauss 写像に対しては出来上がっておらず，さらに藤本氏と Osserman の結果との対応やその幾何的意味がこれまでわかっていなかった．

*kawakami@math.kyushu-u.ac.jp, 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

講演者たちはこのような課題に対して，幾つか興味深い結果を得ることができた．本稿では，その中で特に重要な結果として次の 2 つの結果を紹介する．1 つは，代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数とその拡張に当たる完全分岐値数の幾何的な量による評価である．この結果は，東北大学の宮岡礼子先生，名古屋大学の小林亮一先生との共同研究によって得られた結果 [6] の 1 つで，いくつかの位相型において最良の評価になる．また，この評価の上限に現れる比 R の評価によって，藤本氏と Osserman の結果がつながっていることがわかり，除外値問題に対して新しい進展を与えることができた．もう 1 つは，3 次元双曲型空間 $\mathbb{H}^3(-1)$ 内の代数的 CMC-1 曲面の双曲的 Gauss 写像の除外値数・完全分岐値数の評価 [8] である．この結果自体は代数的極小曲面の場合と変わらないものであるが，この評価の最良性を我々が導入した "完全分岐値数" という量で示す際に極小曲面のときとは異なる結果を示すことができた．以下，この 2 つの結果について詳しく述べることにする．

2　$\mathbb{R}^3$ 内の代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数の評価

まず，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面の基本事項を復習する．詳しいことは Osserman の名著 [13] を参照せよ．平均曲率が恒等的に 0 となる曲面 $x\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ を**極小曲面**（minimal surface）という．$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面の特徴として，成分関数の調和性が挙げられる．つまり，ds^2 を $\mathbb{R}^3$ の Euclid 計量からの誘導計量，$\triangle_{ds^2}$ をその計量に関するラプラシアンとしたとき，次のことが成り立つ：

$$\triangle_{ds^2} x \equiv 0\,.$$

このことから，コンパクトで境界を持たない極小曲面は存在しないということがわかる．さらに，極小曲面は複素解析的データにより構成できるということを主張する「Enneper-Weierstrass の表現公式」が成り立つ．

定理 2.1 (Enneper-Weierstrass の表現公式)**.** M^2 を開 Riemann 面，(ω, g) を M^2 上の正則 1 次微分形式と有理型関数との対で 2 つの条件

$$0 < (1+|g|^2)|\omega| < \infty\,, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Re}\int_c (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega = (0,0,0) \quad (\forall [c] \in H_1(M^2, \mathbb{Z})) \tag{2.2}$$

を満たすとすると，

$$x = \mathrm{Re}\int_\gamma (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega \tag{2.3}$$

は，M^2 上で定義された極小曲面を定め，x の第 1 基本形式 ds^2, 第 2 基本形式 h はそれぞれ次のように表せる：

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \quad h = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g}\,. \tag{2.4}$$

さらに，g はこの曲面の Gauss 写像と同一視できる．

この対 (ω, g) のことを **Weierstrass data**（W-data）という．式 (2.4) から極小曲面の絶対全曲率 $\mathrm{TA}(x)$ は次のように表せる：

$$\mathrm{TA}(x) := \int_M K_{ds^2} dA = \int_M \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2} |dz|^2 \,. \tag{2.5}$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の Fubini-Study 計量の引き戻しによる Gauss 写像の像の面積に他ならない．我々は有限絶対全曲率をもつ完備極小曲面のことを**代数的極小曲面**（algebraic minimal surfaces）と呼ぶことにする．このように呼ぶのは，次の結果から来ている．

定理 2.2 (Huber-Osserman)**.** 代数的極小曲面 $x\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ について次のことが成り立つ：

(i) M はコンパクトリーマン面（種数を γ）$\overline{M}_\gamma$ から有限個（k 個とする）の点 $\{p_1 \ldots, p_k\}$ を除いたリーマン面と双正則である．[3]

(ii) この曲面の W-data (ω, g) は $\overline{M}_\gamma$ 上有理型に拡張される．[12]

次に，代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数・完全分岐値数に対して得られた講演者たちの結果を紹介する．ここで，Gauss 写像の完全分岐値ならびに完全分岐値数とは次に定義するものである．

定義 2.3 (R. Nevanlinna, [10])**.** 値 $b \in \widehat{\mathbb{C}}$ が g の**完全分岐値**（totally ramified value）であるとは，b が g の除外値か，b の g による逆像の点がすべて g の分岐点になるときをいう．g の完全分岐値の集合を $\{a_1, \ldots, a_{r_0}, b_{r_0+1}, \ldots, b_{r_0+l_0}\}$ とする．ここで，a_i は除外値，b_i は除外値でない完全分岐値とする．a_i については $\nu_i = \infty$, b_i については $g^{-1}(b_i)$ の各点における g の重複度の最小値を ν_i とする．特に $\nu_i \geq 2$ である．このとき，g の**完全分岐値数**（totally ramified value number）ν_g を

$$\nu_g = \sum_{a_i, b_i} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$$

で定義する．

定理 2.4 ([6])**.** $x\colon M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \ldots, p_k\} \to \mathbb{R}^3$ を平面でない代数的極小曲面とし，g を $\overline{M}_\gamma$ 上で次数 d となるこの曲面の Gauss 写像とする．D_g を g の除外値数とし，ν_g をその完全分岐値数とする．このとき，

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} < 1 \tag{2.6}$$

が成り立つ．特に，$D_g < 4$ となるので，g の除外値数は高々3 である．

注意 2.5. 評価式 (2.6) は幾つかの位相型において等号が成り立つ．例えば，$(\gamma, k, d) = (0, 2, 1)$ の場合，$2 + (2/R) = 2$ となるが，このときカテノイドがその例となる．また，$(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ の場合，$2 + (2/R) = 2.5$ となるが，このとき Miyaoka-Sato 曲面 [9] が $\nu_g = 2.5$ なので，等号を満たす例となる [5].

注意 2.6. 評価式（2.6）の上限 $2+(2/R)$ について，“2” の幾何的意味は Gauss 写像の値域にあたる Riemann 球面の Euler 数 “2” である．また，比 “R” は曲面の情報によるもので，特に計量による面積比として幾何的意味付けを与えることができる．また，$1/R=1$ に対応する曲面のクラスとして，講演者たちは「擬代数的（pseudo-algebraic）」なるものを定義し，藤本氏と Oseerman の結果の関係の 1 つの解釈を与えることができた [6].

3 $\mathbb{H}^3(-1)$ 内の代数的 CMC-1 曲面の双曲的 Gauss 写像の除外値数の評価

主結果を述べる前に，ここで取り上げる曲面のクラスの基本事項を復習する．$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面の Enneper-Weierstrass の表現公式に対応する公式が $\mathbb{H}^3(-1)$ の CMC-1 曲面に対して成り立つ．ここで，$\mathbb{H}^3(-1)$ は Hermite 型モデル $\mathbb{H}^3(-1)=SL(2,\mathbb{C})/SU(2)=\{aa^* \mid a\in SL(2,\mathbb{C})\}$ （但し，$a^*:={}^t\bar{a}$）で考える．

定理 3.1 (Bryant[1], Umehara-Yamada[15])**.** $\widetilde{M}^2$ を単連結な Riemann 面，(ω,g) を $\widetilde{M}^2$ 上の正則 1 次微分形式と有理型関数の組で，条件

$$0<(1+|g|^2)|\omega|<\infty$$

を満たすとする．このとき，基点 $z_0\in\widetilde{M}^2$ に対して，

$$F^{-1}dF=\begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix}\omega,\quad F(z_0)=\mathrm{id}$$

で定まる正則写像 $F\colon\widetilde{M}^2\to SL(2,\mathbb{C})$ ははめ込みとなり，$f:=FF^*\colon\widetilde{M}^2\to\mathbb{H}^3(-1)$ は第 1 基本形式 $ds^2=(1+|g|^2)^2|\omega|^2$, 第 2 基本形式 $h=-\omega dg-\bar{\omega}d\bar{g}+ds^2$ で定まる CMC-1 曲面となる．逆に，$\widetilde{M}^2$ から $\mathbb{H}^3(-1)$ への CMC-1 はめ込みはすべてこのようにして得られる．

このとき，F を f の**持ち上げ** (lift)，g を f の**第 2 Gauss 写像**，(ω,g) を f の **Weierstrass data** という．定義域の Riemann 面 M^2 が単連結ではないとき，W-data (ω,g) が M^2 上で一価であるとは限らないが，次に定義する双曲的 Gauss 写像は M^2 上一価な有理型関数となる．

定義 3.2. $f\colon M^2\to\mathbb{H}^3(-1)$ を CMC-1 曲面，$F\colon\widetilde{M}^2\to\mathbb{H}^3(-1)$ を f の持ち上げとする．このとき，

$$G=\frac{dF_{11}}{dF_{21}}=\frac{dF_{12}}{dF_{22}},\quad F=(F_{ij})_{1\le i,j\le 2}$$

を f の**双曲的 Gauss 写像**（hyperbolic Gauss map）という．このとき，G は M^2 上一価な有理型関数となる．

上で定義したものの幾何的意味は次のようなことである [1]：

> 曲面の点 $f(p)$ を出発して，ある方向の単位法線ベクトルを初速度ベクトルとする測地線と，$\mathbb{H}^3(-1)$ の理想境界 $\partial\mathbb{H}^3(-1) \cong \mathbb{S}^2_\infty$ との交点が $G(p)$ となる．

次にこの曲面における「代数的クラス」を定義する．

定義 3.3. 完備 CMC-1 曲面が，$\displaystyle\int_M G^*\omega_{F.S.} < \infty$ を満たすとき，この曲面を**代数的 CMC-1 曲面**（algebraic CMC-1 surface）と呼ぶ．

注意 3.4. 条件 $\displaystyle\int_M G^*\omega_{F.S.} < \infty$ は，f の双対曲面 $f^\sharp := F^{-1}(F^{-1})^*$ が完備かつ有限絶対全曲率であることを意味している [18]．

定理 3.5 (Bryant, Huber, Umehara-Yamada)**.** 代数的 CMC-1 曲面 $f\colon M^2 \to \mathbb{H}^3(-1)$ について次のことが成り立つ：

(i) M はコンパクトリーマン面（種数を γ）$\overline{M}_\gamma$ から有限個（k 個とする）の点 $\{p_1 \ldots, p_k\}$ を除いたリーマン面と双正則である．[3]

(ii) この曲面の双曲的 Gauss 写像 G は $\overline{M}_\gamma$ 上有理型に拡張される．[1], [18]

このクラスの双曲的 Gauss 写像の除外値数・完全分岐値数についても次のことが成り立つ．

定理 3.6 ([8])**.** $f\colon M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \ldots, p_k\} \to \mathbb{R}^3$ をホロスフィアでない代数的 CMC-1 曲面とし，G を $\overline{M}_\gamma$ 上で次数 d となるこの曲面の双曲的 Gauss 写像とする．D_G を G の除外値数とし，ν_G をその完全分岐値数とする．このとき，

$$D_G \leq \nu_G \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} < 1 \tag{3.1}$$

が成り立つ．特に，$D_G < 4$ となるので，G の除外値数は高々3 である．

注意 3.7. 完備 CMC-1 曲面 f の双曲的 Gauss 写像の除外値数の評価に関しては，一般の場合は Z.Yu [20]（これは最良の結果）が，f が有限絶対全曲率の場合は Collin-Hauswirth-Rosenberg [4] による結果がある．我々の結果はこれらの結果を踏まえて本質的に重要である「代数的クラス」を新たに定式化し，かつさらに精密に評価したものである．

注意 3.8. 評価 (3.1) の証明には，本質的には [6] で得られた値分布の状況から得られた不等式と，[18] で得られた Osserman の不等式を組み合わせることによって得られる．

評価式 (3.1) の等号が成り立つ場合を考える．例えば，$(\gamma, k, d) = (0, 2, 1)$ の場合，$2 + (2/R) = 2$ となるが，このときカテノイドカズン [1], [15] がその例となる．一方，$(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ の場合，$2 + (2/R) = 2.5$ となり，代数的極小曲面のときはその最良性を示す例が存在したが，この場合，次のように存在しないことがわかる．これは，極小曲面のときとは異なる値分布論的現象である．

命題 3.9 ([8], Rossman-Umehara-Yamada[14])**.** $(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ のとき，双曲的 Gauss 写像の完全分岐値数が 2.5 の代数的 CMC-1 曲面の例が存在しない.

このことは，極小曲面と CMC-1 曲面の「周期条件（period condition）」の違いから起こっているものであるが，これが他の位相型（特に種数 1 以上）にもどのような影響を与えるかを調べることは今後の課題である.

参考文献

[1] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque No. 154-155(1987), **12**, 321–347, 353(1988).

[2] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan **40**(1988), no. 2, 235–247.

[3] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32**(1957), 13–72.

[4] P. Collin, L. Hauswirth, H. Rosenberg, *The Gaussian image of mean curvature one surfaces in $\mathbb{H}^3$ of finite total curvature*, Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999), 9–14, Adv. Stud. Pure Math., **34**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[5] Y. Kawakami, *On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82**(2006), no. 1, 1–3.

[6] Y. Kawakami, R. Kobayashi, R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Forum Math. **20**(2008), no. 6, 1055–1069.

[7] Y. Kawakami, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$*, Math. Nachr. **282**(2009), no. 2, 211–218.

[8] Y. Kawakami, *Ramification estimates for the hyperbolic Gauss map*, to appear in Osaka Journal of Mathematics, arXiv:0804.0470.

[9] R. Miyaoka, K. Sato, *On complete minimal surfaces whose Gauss maps miss two directions*, Arch. Math. (Basel) **63**(1994), no. 6, 565–576.

[10] R. Nevanlinna, Analytic Function, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1970.

[11] R. Osserman, *Proof of a conjecture of Nirenberg*, Comm. Pure Appl. Math **12** (1959), 229–232.

[12] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n*, Ann. of Math. (2) **80** (1964), 340–364.

[13] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[14] W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature. I*, Hiroshima Math J. **34**(2004), no. 1, 21–56.

[15] M. Umehara, K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature* 1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. (2) **137**(1993), no. 3, 611–638.

[16] M. Umehara, K. Yamada, *A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ into the hyperbolic* 3*-space*, J. Reine Angew. Math. **432**(1992), 93–116.

[17] M. Umehara, K. Yamada, *Surfaces of constant mean curvature c in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map*, Math. Ann. **304**(1996), no. 2, 203–224.

[18] M. Umehara, K. Yamada, *A duality on CMC-*1 *surfaces in hyperbolic space, and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality*, Tsukuba J. Math. **21**(1997), 229–237.

[19] F. Xavier, *The Gauss map of a complete nonflat minimal surface cannot omit* 7 *points of the sphere*, Ann. of Math. (2) **113**(1981), no. 1, 211–214.

[20] Z. Yu, *The value distribution of the hyperbolic Gauss map*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 10, 2997–3001.