

Stability of certain reflective orbits of cohomogeneity one actions on compact symmetric spaces

木村太郎 大阪市立大学 数学研究所 研究所員

2008.11.27, 「部分多様体論・湯沢 2008」

1 序論

本研究の目的は、コンパクトリーマン対称空間における全測地的部分多様体の幾何学的構造と、その極小部分多様体としての安定性との関連を調べることである。

[3] において、我々は階数 2 のコンパクト単連結既約リーマン対称空間の極大全測地的部分多様体を全て決定した。この結果から全空間の制限ルート系が G_2 型以外なら、極大全測地的部分多様体は鏡映部分多様体であるということがわかる。また [4] において、我々は階数 2 のコンパクト単連結既約リーマン対称空間の極大全測地的部分多様体の安定性を全て決定した。特に、その極大全測地的部分多様体が鏡映部分多様体であり、その直交補空間が階数 1 の場合には証明が簡潔になる。この条件をみたす鏡映部分多様体は、あるリー群の等長的作用から決まる軌道であることがわかる。その作用は、cohomogeneity one action と呼ばれる。コンパクト型既約リーマン対称空間への cohomogeneity one action は、A. Kollross によって完全に与えられた ([6])。彼の手法は、case-by-case に調べて完全に分類するというものである。この分類方法では、我々の目的である全測地的部分多様体の幾何学的構造がはっきり明示されない。一方、リーマン多様体へのリー群の等長的作用が cohomogeneity one action であることと、その軌道の isotropy が法空間の単位球へ推移的に作用することが同値であるという事実がある。この事実をリーマン対称空間に適用した場合、法空間はどのような空間か？このことを関連付けた結果が、J. Berndt と田丸博士の結果である ([2])。この結果によると、特異軌道が鏡映部分多様体の場合にはその法空間が階数 1 のリーマン対称空間となる。以上のことを踏まえると、我々の目標である全測地的部分多様体の幾何学的構造と、その極小部分多様体としての安定性の関連付けるには、次に定義する cohomogeneity one action という等長的作用と鏡映部分多様体という概念が必要であると考えられる。

加えて、cohomogeneity one action の軌道でないある鏡映部分多様体の安定性についての結果も報告する。

2 謝辞

部分多様体・湯沢での講演の機会を与えて下さった間下克哉先生と田崎博之先生に感謝申し上げます。

3 Cohomogeneity one actions on Riemannian manifolds

定義 3.1. (N, g) をリーマン多様体、 G をリー群とする。このとき、軌道 $G \cdot p$ ($p \in N$) が主軌道であるとは、任意の $q \in N$ に対して、ある G の元 g があって次をみたすこと: $G_p \subset gG_qg^{-1}$ 。ここで、 G_p と G_q はそれぞれ点 p と点 q の isotropy 部分群を表す。

注意 3.2. 定義より, 主軌道は最大次元の軌道であることがわかる.

定義 3.3. (N, g) をリーマン多様体, G をリー群, $G \cdot q$ ($q \in N$) を主軌道とする. このとき, 軌道 $G \cdot p$ ($p \in N$) が特異軌道であるとは, $\dim(G \cdot p) < \dim(G \cdot q)$ をみたすこと.

以上をふまえて, リーマン多様体 (N, g) への cohomogeneity one action を定義する.

定義 3.4. リーマン多様体 (N, g) への等長的作用が **cohomogeneity one action** であるとは, その主軌道の余次元が 1 になること.

注意 3.5. [1] により, cohomogeneity one action の特異軌道は極小である.

4 Reflective submanifolds on Riemannian manifolds

次に, D. S. P. Leung が導入した鏡映部分多様体を定義する.

定義 4.1 ([7]). リーマン多様体 (N, g) の部分多様体 M が鏡映部分多様体であるとは, M が N のある対合的等長変換の固定点集合の連結成分になっていることをいう.

注意 4.2. 鏡映部分多様体は等長変換の固定点集合の連結成分であるので, 全測地的部分多様体である. したがって, N がリーマン対称空間なら鏡映部分多様体 M は誘導計量に関してリーマン対称空間になる.

命題 4.3 ([7]). M をリーマン対称空間 N の部分多様体とする. このとき, M が鏡映部分多様体であるための必要十分条件は, M と直交補空間 M^\perp が共に全測地的部分多様体となること.

次に, 鏡映部分多様体と密接に関連する Hermann action を定義する.

定義 4.4 (Hermann action). コンパクトリーマン対称空間 $N = U/L$ 上へのコンパクトリー群 H の作用が **Hermann action** であるとは, (U, H) が対称対になること.

命題 4.5. コンパクトリーマン対称空間 $N = U/L$ の鏡映部分多様体を M とする. このとき, M は U のリー部分群 H の Hermann action の全測地的軌道になる. 逆に, Hermann action の全測地的軌道は鏡映部分多様体になる.

命題 4.5 は, 我々の目的であるコンパクトリーマン対称空間の全測地的部分多様体の安定性の決定に必要な命題である.

5 Known results

非コンパクト型リーマン対称空間への cohomogeneity one action に関して, J. Berndt と田丸博士 によって与えられた次のような結果がある.

命題 5.1 ([2]). N^* を非コンパクト型リーマン対称空間とし, N をそのコンパクト双対とする. このとき, N^* の cohomogeneity one action の全測地的軌道 M^* と N の cohomogeneity one action の全測地的軌道 M は 1 対 1 に対応する.

また, 彼らは次の必要十分条件を与えた.

命題 5.2 ([2]). N^* を非コンパクト型リーマン対称空間とし, M^* を N^* の鏡映部分多様体とする. このとき, M^* が cohomogeneity one action の全測地的軌道である必要十分条件は, $(M^*)^\perp$ が階数 1 のリーマン対称空間になること.

命題 5.1 と命題 5.2 から, コンパクト型リーマン対称空間 N の cohomogeneity one action の鏡映軌道 M を見つけることができる.

6 On stability of totally geodesic submanifolds

$N = U/L$ をコンパクトリーマン対称空間とする. このとき, 全測地的埋め込み $f : M = G/K \rightarrow N = U/L$ に対して, [9] により, f の $\text{index}(f)$ と $\text{nullity}(f)$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \text{index}(f) &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_i}} \dim \text{Hom}_K(V_\lambda, (\mathfrak{m}_i^\perp)^\mathbb{C}) \dim V_\lambda & (\#) \\ \text{nullity}(f) &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda = a_i}} \dim \text{Hom}_K(V_\lambda, (\mathfrak{m}_i^\perp)^\mathbb{C}) \dim V_\lambda \end{aligned}$$

ここで, $D(G)$ は G の既約表現 (λ, V_λ) の同値類全体の集合を表す. また, G と U のリー環をそれぞれ \mathfrak{g} と \mathfrak{u} , M と N の標準分解をそれぞれ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ と $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ とする. \mathfrak{u} における \mathfrak{g} の直交補空間を \mathfrak{g}^\perp とすると, 単純 G -module 分解 $\mathfrak{g}^\perp = \sum_{i=1}^k \mathfrak{g}_i^\perp$ を得る. $\mathfrak{m}^\perp := \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^\perp$, $\mathfrak{m}_i^\perp := \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{g}_i^\perp$ とし, a_λ は G の既約表現 (λ, V_λ) の Casimir 作用素の固有値, a_i は G の既約表現 $(\mu_i, \mathfrak{g}_i^\perp)$ の Casimir 作用素の固有値を表す.

注意 6.1. ここで, f が安定 (M が安定) であるための必要十分条件は, $\text{index}(f) = 0$ である.

7 Stability of reflective orbits of cohomogeneity one actions

この節では, コンパクト単連結既約リーマン対称空間における cohomogeneity one action から決まる鏡映軌道の安定性を全て決定する. 以下, N はコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota : M = G/K \rightarrow N = U/L$ に対して, 大仁田の index 公式 (#) を用いる. いま M は鏡映部分多様体であることより, M はある $H \subset U$ の Hermann 作用から決まる全測地的軌道である. この事実より, コンパクト対称対 (U, H) を次の 3 つの場合に分けて考える.

1. U/H はエルミート対称空間.
2. U/H と M^\perp は四元数ケーラー対称空間.
3. U/H は上記以外.

また, 仮定により M^\perp は階数 1 のコンパクトリーマン対称空間であるから, $T_o M^\perp$ は単純 K -module となる.

1 の場合 :

仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}$ は, 対称対 $(U, T \cdot G)$ から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^\perp$ とすると, $\mathfrak{g}^\perp \cong \mathbb{R} \oplus T_o(U/H)$ であり, この直和分解は単純 \mathfrak{g} -module 分解である. $\mathfrak{g}_1^\perp = \mathbb{R}$, $\mathfrak{g}_2^\perp = T_o(U/H)$ とすると, \mathfrak{g} の \mathfrak{g}_1^\perp への作用は自明で, \mathfrak{g} の \mathfrak{g}_2^\perp への作用は U/H の線形イソトロピー表現の \mathfrak{g} への制限と同値. これより, (#) は

$$\text{index}(\iota) = \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \text{Hom}_K(V_\lambda, (T_o M^\perp)^\mathbb{C}) \dim V_\lambda$$

となる.

2 の場合 :

仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}$ は, 対称対 $(U, Sp(1) \cdot G)$ から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^\perp$ とすると, $\mathfrak{g}^\perp \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus T_o(U/H)$ である. $\mathfrak{g}_i^\perp \cong \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathfrak{g}_4^\perp \oplus \mathfrak{g}_5^\perp \cong T_o(U/H)$ とすると, \mathfrak{g} の \mathfrak{g}_i^\perp ($i = 1, 2, 3$) への作用は自明で, \mathfrak{g} の \mathfrak{g}_j^\perp ($j = 4, 5$) への作用は U/H の線形イソトロピー表現の \mathfrak{g} への制限と同値. これより, (#) は

$$\text{index}(\iota) = \sum_{k=1}^2 \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \text{Hom}_K(V_\lambda, (T_o M_k^\perp)^\mathbb{C}) \dim V_\lambda$$

となる. ここで, 仮定より M^\perp は階数 1 のコンパクトリーマン対称空間であり, また四元数ケーラー対称空間であるので, $M^\perp \cong \mathbb{H}P^k$ ($\exists k \in \mathbb{N}$) となる. これから, 単純 K -module 分解 $T_o M^\perp \cong T_o M_1^\perp \oplus T_o M_2^\perp$ を得る.

3 の場合 :

仮定より, $M = G/K$ は Hermann 作用の全測地的軌道である. よって, 自己同型群のリー環の単射準同型 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}$ は, 対称対 (U, G) から引き起こされる. $\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^\perp$ とすると, $\mathfrak{g}^\perp \cong T_o(U/G)$ であり, \mathfrak{g}^\perp は単純 \mathfrak{g} -module である. \mathfrak{g} の \mathfrak{g}^\perp への作用は U/G の線形イソトロピー表現と同値. これより, (#) は

$$\text{index}(\iota) = \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_\rho}} \dim \text{Hom}_K(V_\lambda, (T_o M^\perp)^\mathbb{C}) \dim V_\lambda$$

となる.

注意 7.1. a_ρ は, コンパクトリーマン対称空間 U/H の isotropy 表現 ρ のカシミール作用素の固有値を表す.

1 ~ 3 の場合で, $\text{index}(\iota) = 0$ となるためには, 任意の $\lambda \in D(G)$ に対して, $a_\lambda > a_\rho$ を満たす λ が自明な表現以外存在しなければよいので, 次の定理を得る.

定理 7.2 ([5]). N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota: M = G/K \rightarrow N = U/L$ に対して, $T_o(U/H) \cong V_{\varpi_1(G)}$ であるならば, $\text{index}(\iota) = 0$.

注意 7.3. ここで, H は鏡映部分多様体 M を決める U のコンパクトリー部分群であり, $V_{\varpi_1(G)}$ は G の ϖ_1 -表現空間である.

また, 定理 7.2 の仮定を満たしていない鏡映軌道の安定性は個別に議論し, 次の定理を得た.

定理 7.4 ([5]). N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, 包含写像 $\iota: M = G/K \rightarrow N = U/L$ の安定性を全て決定した.

定理 7.4 より, 次がただちにわかる.

系 7.5 ([5]). N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間とし, M は $o \in N$ を通る cohomogeneity one action の鏡映軌道とする. このとき, N が A_2 型以外ならば安定である.

8 Stability of reflective submanifolds

この節では, コンパクト単連結既約リーマン対称空間におけるある鏡映部分多様体の安定性を報告する.

前節の系 7.5 に関連する結果として, 次の結果がある.

定理 8.1 ([8]). Cartan 埋め込み $f: AI(n) = SU(n)/SO(n) \rightarrow SU(n)$ ($n \geq 3$) は不安定.

また次も容易にわかる.

命題 8.2. 包含写像 $f: SU(n) \rightarrow AII(n)$ ($n \geq 3$) は不安定.

定理 7.4, 定理 8.1 と命題 8.2 をふまえて, 次の問題を考えるのは自然である.

問題: N をコンパクト単連結既約リーマン対称空間, M は N の鏡映部分多様体とする.

このとき, M は N の安定な極小部分多様体 $\iff \Gamma(M) \cong ?$

この問題においては, [9] における index の公式ではなく, 積分幾何学で用いられる Poincaré の公式での解決方法を模索している.

最後に A_2 型における index と nullity の表を与える.

N	M	index	nullity
$SU(3)$	$AI(3)$	6	8
$AII(3)$	$SU(3)$	6	9
EVI	$AII(3)$	24	40

参考文献

- [1] J. Berndt and M. Brück, *Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math. **541** (2001), 209–235.
- [2] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit*, Tohoku Math. J., **56** (2004), 163–177.
- [3] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Totally geodesic submanifold in compact symmetric spaces of rank two*, Tokyo J. Math. **31**, No. 2 (2008), 421–447.
- [4] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Stability of certain minimal submanifolds in compact symmetric spaces of rank two*, Differential Geom. Appl. **27** (2009), 23–33.
- [5] T. Kimura, *Stability of certain reflective submanifolds in compact symmetric spaces*, Tsukuba J. Math. **32**, No. 2 (2008), 361–382.
- [6] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 571–612.
- [7] D. S. P. Leung, *On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, Indiana Univ. Math. J, **24** (1974), 327–339; Errata, Indiana Univ. Math. J, **24** (1975), 1199.
- [8] K. Mashimo, *On the stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Arch. Math., **58** (1992), 500–508.
- [9] Y. Ohnita, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Composito Math., **64** (1987), 157–189.