擬球面の標準はめ込みについて

三浦 幸平
(東京理科大学大学院理学研究科研究生)

概 要

Euclid 空間と擬 Euclid 空間上の調和多項式とを Wick 回転によって対応付けることで、擬 Euclid 空間上の調和多項式の空間に擬直交群不変な擬内積を与えることができる。これを用いて球面の標準はめ込みの対応物を擬球面上に構成する。このようにして得られた擬球面の標準はめ込みは、擬 Riemann 幾何における helical immersion となることを示す。また、Riemann 幾何において、はめ込みが helical であることと、geodesic normal sections を持つこととは同値であることが知られている。しかし擬 Riemann 幾何においては、一般にこの同値性は成り立たない。両者が同値となる条件を述べる。

1 擬球面の標準はめ込み

体 $\mathbb{F}$($\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$) 上の $n+1$ 変数多項式環を $\mathbb{F}[x]$ で表し、$\mathbb{F}_d[x]$ で斉 d 次多項式全体を表す。$\mathbb{F}$ 上の $n+1$ 次一般線型群 $GL(\mathbb{F}^{n+1})$ の $\mathbb{F}^{n+1}$ への自然な作用が引き起こす $\mathbb{F}[x]$ への左作用 (環同型) を $L(g)$ で表す：$g=(g_{ij})\in GL(\mathbb{F}^{n+1})$ に対して

$$L(g)(1)=1,\quad L(g)(x_i)=\sum_{j=1}^{n+1}\hat{g}_{ij}x_j,\quad ただし、g^{-1}=(\hat{g}_{ij}).$$

次元 $n+1$、指数 t の擬 Euclide 空間を $\mathbb{R}_t^{n+1}$ で表す。$\mathbb{R}_t^{n+1}$ のラプラス作用素 $\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}$ は

$$\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}=\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\in W_{n+1}(\mathbb{R}).\quad ただし、\tau_i:=\begin{cases}-1 & \text{for } 1\le i\le t\\ +1 & \text{for } t<i\le n+1.\end{cases}$$

ここで、$W_{n+1}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の $n+1$ 次 Weyl 代数を表す。$\mathbb{R}_0^{n+1}$ 上と同様に、多項式 $P\in\mathbb{R}[x]$ が $\mathbb{R}_t^{n+1}$ 上で**調和**であることを、$P\in\mathcal{H}(\mathbb{R}_t^{n+1}):=\operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}$ で定め、$\mathbb{R}_t^{n+1}$ 上の斉 d 次調和多項式のなすベクトル空間を $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1}):=\mathbb{R}_d[x]\cap\mathcal{H}(\mathbb{R}_t^{n+1})$ とおく。このとき、次の性質は Euclid 空間 $\mathbb{R}_0^{n+1}$ 上の場合と同様に成り立つ：

- $\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}$ は擬直交群 $O(\mathbb{R}_t^{n+1})$-不変： $\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}\circ L(g)=L(g)\circ\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}\quad(g\in O(\mathbb{R}_t^{n+1}))$
- $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1})$ は, $O(\mathbb{R}_t^{n+1})$-不変空間であり、その次元は $(2d+n-1)\dfrac{(n+d-2)!}{(n-1)!\,d!}$ である。特に、指数 t に依らないことに注意する。

整数 t $(0\le t\le n+1)$ に対して、$\mathbb{C}[x]$ 上の環同型 ρ_t を次で定める：$\rho_t=L(\sqrt{I_t^{n+1}}^{-1})$. ここで、$\sqrt{I_t^{n+1}}=(\sqrt{\tau_i}\,\delta_{ij})\in GL(\mathbb{C}^{n+1})$. この ρ_t は $\mathbb{R}[x]\subset W_{n+1}(\mathbb{R})$ 上に一意的な拡張

$\widetilde{\rho}$ をもち、$\Delta_{\mathbb{R}_0^{n+1}}$ に対して $\widetilde{\rho}_t(\Delta_{\mathbb{R}_0^{n+1}}) = \Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}} \in W_{n+1}(\mathbb{C})$ と作用する。さらに、任意の $D \in W_{n+1}(\mathbb{R})$ に対して、次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{\rho_t} & \mathbb{C}[x] \\ {\scriptstyle D}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\rho}_t(D)} \\ \mathbb{R}[x] & \xrightarrow[\rho_t]{} & \mathbb{C}[x]. \end{array}$$

さらに、$\sigma_s := \rho_s \circ \rho_s = L(I_s^{n+1})$, $P_s^{\pm} := \mathrm{Ker}\,(\sigma_s \mp \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]})$ とおくと、$\mathbb{R}[x] = P_s^+ \oplus P_s^-$ となる。整数 $0 \leq s, t \leq n+1$ に対して σ_s と $\Delta_{\mathbb{R}_t^{n+1}}$ は可換であり

$$\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1}) = \mathcal{H}_{d,s}^+(\mathbb{R}_t^{n+1}) \oplus \mathcal{H}_{d,s}^-(\mathbb{R}_t^{n+1}). \quad ただし、\mathcal{H}_{d,s}^{\pm}(\mathbb{R}_t^{n+1}) := P_s^{\pm} \cap \mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1}).$$

以上から、次の補題を得る：

補題 1. ρ_t は $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1})$ と $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1})$ の間に次の対応を与える：

$$\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1}) = \mathrm{Re}\,\rho_t(\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1})) \oplus \mathrm{Im}\,\rho_t(\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1})).$$

ここで、Re と Im はそれぞれ $\mathbb{C}[x]$ における実部、虚部への射影を表す。

さらに $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1})$ は、

- 球面 $S^n(\subset \mathbb{R}_0^{n+1})$ 上の L^2-内積から誘導される内積に関して $O(\mathbb{R}_0^{n+1})$-不変である。
- 次を満たす正規直交系 $\{U_i\}_i$ を持つ：

$$U_1, \ldots, U_{l(d,t)} \in \mathcal{H}_{d,t}^-(\mathbb{R}_0^{n+1}), \quad U_{l(d,t)+1}, \ldots, U_{m(d,t)+1} \in \mathcal{H}_{d,t}^+(\mathbb{R}_0^{n+1}),$$
$$\sum_{i=1}^{m(d,t)+1} {U_i}^2 = ({x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2)^2.$$

ここで、$m(d,t)+1 := \dim \mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1})$, $l(d,t) := \dim \mathrm{Im}\,\rho_t(\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_0^{n+1}))$ である。

補題 1 により

$$U_{i,t} := \mathrm{Im}\,\rho_t(U_i) \quad (i = 1, \ldots, l(d,t)),$$
$$U_{i,t} := \mathrm{Re}\,\rho_t(U_i) \quad (i = l(d,t)+1, \ldots, m(d,t)+1)$$

とおくと $\{U_{i,t}\}_i$ は $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1})$ の基底となる。以上より次を得る：

補題 2. 基底 $\{U_{i,t}\}_i$ を擬正規直交系とする $O(\mathbb{R}_t^{n+1})$-不変擬内積が $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1})$ に定まる。

以降、$\mathcal{H}_d(\mathbb{R}_t^{n+1})$ はこの補題の意味で擬内積空間として考える。一般に次元 n, 指数 t の単位擬球面 $S_t^n \subset \mathbb{R}_t^{n+1}$ に対して、$\mathbb{R}_t^{n+1}$ 上の斉 d 次調和多項式の S_t^n への制限は固有値 $-d(n+d-1)$ の固有関数となる。$S_t^n(k)$ を次元 n, 指数 t, 曲率 k の擬球面とする。

定理 3. 任意の $d,\ n,\ t \in \mathbb{N}$ に対して、擬球面 S^n_t 上の写像 $\psi_{n,d,t}$ を次で定める：

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{n+1}_t \supset S^n_t &\longrightarrow S^{m(d,t)}_{l(d,t)}(k(d)) \subset \mathbb{R}^{m(d,t)+1}_{l(d,t)} \cong \mathcal{H}_d(\mathbb{R}^{n+1}_t)\\ p \quad &\mapsto (U_{1,t}(p), \ldots, U_{m(d,t)+1,t}(p))\end{aligned}$$

このとき、$\psi_{n,d,t}$ は擬 Riemann 等長はめ込みであり、$k(d) = d(d+n-1)/n$ である。

2 Helical immersion

本講演では、次を満たす曲線 c を擬 Riemann 多様体 M 上の**次数 d の螺旋**と呼ぶ：

$$c_1 = c', \quad \langle c_i, c_i \rangle = \varepsilon_i \in \{-1, +1\}, \quad \nabla_{c'} c_i = -\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i\lambda_{i-1}c_{i-1} + \lambda_i c_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, d).$$

ここで、$\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{R}_+,\ \ \varepsilon_0 = \lambda_0 = \lambda_d = 0,\ \ c_0 = c_{d+1} = 0$ である。ε_i を c の第 i 符号、λ_i を c の第 i 曲率とよぶ。簡単の為、$\Lambda := (d; \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ とおき、上の c を Λ 型の螺旋と呼ぶ。

定義 4. $M,\ \bar{M}$ を擬 Riemann 多様体、$f : M \to \bar{M}$ を等長はめ込みとする。
f:Λ **型の空間的 helical immersion** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\gamma$:Mの空間的測地線 $[f \circ \gamma :\ \bar{M}$ の Λ 型の螺旋$]$
f:Λ' **型の時間的 helical immersion** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\gamma$:Mの時間的測地線 $[f \circ \gamma :\ \bar{M}$ の Λ' 型の螺旋$]$
ここで、$\Lambda,\ \Lambda'$ の第 1 符号はそれぞれ $+1,\ -1$ である。

一般の螺旋の型 $\Lambda = (d; \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ に対して、$\overline{L}$ を次のようにおく：

$$\overline{\Lambda} = (d; \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}; (-1)^1\varepsilon_1, \ldots, (-1)^d\varepsilon_d).$$

定理 5. $f : M \to \bar{M}$ を擬 Riemann 多様体間の等長はめ込みとする。M が不定値のとき次は同値である。

(i) f は Λ 型の空間的 helical immersion である。

(ii) f は $\overline{\Lambda}$ 型の時間的 helical immersion である。

光的測地線に対しては次が成り立つ。

命題 6. $f : M \to \bar{M}$ を定曲率空間への helical immersion とする。M が不定値であるとき、M の各光的測地線 γ に対して、$f \circ \gamma$ は $\bar{M}$ の等方的な全測地的部分多様体に含まれる。

定理 5 より、定義域が不定値なとき helical immersion の次数は、値域の次元と指数により抑えられることが分かる。

系 7. $f : M \to \bar{M}$ が次数 d の helical immersion であり、M が不定値のとき

$$d \leq \min\left\{m - \frac{1 + (-1)^{[(m-1)/2]}}{2},\ 4l\right\}.$$

ここで、$m = \dim \bar{M},\ \ l = \min\{\mathrm{ind}\, \bar{M}, \dim \bar{M} - \mathrm{ind}\, \bar{M}\}$ である。

系 8. Lorentz 多様体間の helical immersion の次数は 4 以下である。

したがって、高次の helical immersion を許容するには、$\bar{M}$ は高次元で neutral な指数に近いことが必要である。さらに、$\bar{M}$ が定曲率空間のとき、helical immersion の次数は上の系で与えられたものより強い制限を受ける：

命題 9. 定曲率空間 $\bar{M}$ への helical immersion $f: M \to \bar{M}$ の次数は、M が不定値のとき次をみたす。

$$d \leq \min\left\{\operatorname{codim} f + \frac{1+(-1)^{[\operatorname{codim} f/2]}}{2},\ 4s+2\right\}.$$

ただし、$s = \min\{\operatorname{coind} f,\ \operatorname{codim} f - \operatorname{coind} f\}$ $\ (\operatorname{coind} f = \operatorname{ind} N - \operatorname{ind} M)$ である。

系 10. Lorentz 多様体間の helical immersion の次数は、値域が定曲率のとき 2 以下である。

球面上の標準はめ込み $\psi_{n,d,0} = \psi_{n,d}$ は次数 d の helical immersion となっていることが知られている。値域が正定値であることから、その型を次のようにおける:

$$\Lambda_0 := (d; \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}; +1, \ldots, +1).$$

このとき、前節で得た擬球面の標準はめ込みに関して次が成り立つ：

定理 11. 任意の $n, d, t \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2; d \geq 1;\ 0 \leq t \leq n)$ に対して、$\psi_{n,d,t}$ は helical immersion であり、その型は次表の通り：

	$\psi_{n,d,0}$	$\psi_{n,d,1}$	$\cdots$	$\psi_{n,d,n-1}$	$\psi_{n,d,n}$
$(+)$	Λ_0	Λ_0	$\cdots$	Λ_0	—
$(-)$	—	$\overline{\Lambda_0}$	$\cdots$	$\overline{\Lambda_0}$	$\overline{\Lambda_0}$

ここで、$(+)$ は空間的 helical immersion としての型、$(-)$ は時間的 helical immersion としての型を表す。

3 Geodesic normal sections を持つはめ込み

Riemann 幾何において、はめ込みが helical であることと、geodesic normal sections を持つこと (後述) とは同値であるが知られている [1]。擬 Riemann 幾何においても helical immersion は geodesic normal sections を持つ [2] が、一般にこの逆は成り立たない (例 13)。まず、擬 Riemann 幾何における normal section を定義する。

本節では $\bar{M}$ を定曲率擬 Riemann 多様体とし、$f: M \to \bar{M}$ は擬 Riemann 等長はめ込み、$UM := U^+M \cup U^-M$ を M の単位球面束とする。点 $p \in M$ と単位接ベクトル $u \in U_pM$ に対して、次をおく：

$$E(p,u) := \operatorname{Span}\{f_*(u)\} \oplus \operatorname{Span}\{T_p^{\perp}M\} \subset T_{f(p)}\bar{M}.$$

このとき、M の全測地的部分多様体 $E \ni f(p)$ で、$T_{f(p)}E = E(p,u)$ であるものが存在しする。さらに、共通部分 $f(M) \cap E$ は局所的に正則曲線 β_u を定める。この曲線 β_u に $\beta_u(0) = p$, $\beta_u'(0) = u$ を満たす弧長変数を与えた曲線を (p,u) に対する **normal section** とよぶ。

定義 12. f が **geodesic normal sections を持つ** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall u \in UM[\beta_u$ が M 内で測地線$]$

例 13. $g_1, \ldots, g_s$ を $\mathbb{R}^n_t$ 上の多項式に対して、f を

$$f : \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^{n+2s}_{t+s} \cong \mathbb{R}^s_s \oplus \mathbb{R}^n_t \oplus \mathbb{R}^s_0; \quad p \mapsto (g_1(p), \ldots, g_s(p),\ p\ , g_1(p), \ldots, g_s(p))$$

とおく。$\min\{\deg g_i \mid i = 1, \ldots, s\} \geq 2$ のとき、f は helical immersion でないが、geodesic normal sections を持つはめ込みである。

自然数 k に対して TM 上の関数を次で定める：

$$(G_kB)(v) := \det\left(\langle (D^{i-2}B)(v^i), (D^{j-2}B)(v^j)\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq k}, \quad (v \in TM).$$

ただし、B は f の第 2 基本形式であり、D^iB は Levi-Civita 接続に関する i 階微分である。また、$(D^{-1}B)(v) := v$, $(D^0B) := B$ と約束する。このとき、次が成り立つ。

命題 14. f が geodesic normal sections を持つとき、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して G_kB は U^+M 上定数である。

命題 14 から、geodesic normal sections を持つはめ込み f に対して、$G_kB \neq 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ であり、$G_{r+1}B \equiv 0$ であるような自然数 r が一意的に定まる。この r を f の非退化次数と呼ぶことにする。

定理 15. 定曲率空間への擬 Riemann 等長はめ込みに対して次は同値である。

(1) 次数 d の helical immersion である。

(2) geodesic normal sections を持ち、その非退化次数は d であり d-planar である。

参考文献

[1] B. Y. Chen and P. Verheyen, Submanifolds with geodesic normal sections. Math. Ann. **269**, No. 3, 417–429 (1984).

[2] K. Miura, Helical geodesic immersions of semi-Riemannian manifolds, Kodai Math. J. **30**, No. 3, 322–343 (2007).

[3] K. Miura, Construction of harmonic maps between semi-Riemannian spheres, Tsukuba J. Math. **31**, No. 2, 397–409 (2007).

[4] K. Miura, Isometric immersions with geodesic normal sections in semi-Riemannian geometry, Tokyo J. Math. **31**, No. 2, 479–488 (2008).