

グラスマン多様体への調和写像

長友康行

九州大学大学院数理学研究院

1. 序論

本講演はリーマン多様体から球面への極小はめ込みに関する「高橋の定理」[4]をグラスマン多様体への調和写像に関する定理に拡張することを目的とする。

まず、リーマン多様体から球面への調和写像に関する「高橋の定理」を思い出すことにする。そのために (M, g) をリーマン多様体、 S^{N-1} を $N-1$ 次元球面として S^{N-1} はユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に単位球面として等長的に埋め込まれていると仮定する。 $\mathbf{R}^N$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_N$ に関する座標関数を $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ とおく。 M から S^{N-1} への写像

$$f: M \rightarrow S^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$$

を考える。簡単のため、写像 f による座標関数の M への引き戻しも $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と書くことにする。このとき、「高橋の定理」は以下のようになる。

定理 1.1. 写像 $f: M \rightarrow S^{N-1}$ に対する次の2条件は互いに同値である。

- (1) $f: M \rightarrow S^{N-1}$ は調和写像である。
- (2) M 上のある関数 $h \in C^\infty(M)$ が存在して、任意の $A = 1, \dots, N$ に対して、

$$\Delta x_A = h x_A$$

が成立する。ここで、 Δ は (M, g) のラプラス作用素を表す。

この条件の下、関数 h は $h = 2e(f)$ をみたす。ただし $e(f)$ は f のエネルギー密度

$$e(f)(x) := \frac{1}{2}|df|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |df(e_i)|^2, \quad n = \dim M$$

である。

この定理の証明では、 $f(x)$ を $\mathbf{R}^N$ に値を持つ関数と考え、位置ベクトル $f(x)$ の微分を考えることがひとつの重要な観点であった。

次にリーマン多様体からグラスマン多様体への写像を問題にする。記号を固定するために、グラスマン多様体の幾何学を復習する。 W を N 次元実、もしくは複素ベクトル空間とし、 W 内の p 次元部分空間からなるグラスマン多様体を $Gr_p(W)$ とおく。 $(W$ が実ベクトル空間のときには W は向きを持つと仮定し、向きを込めた部分空間からなるグラスマン多様体も考えることにするが、記号が煩雑になることを避けるため、区別しないことにする。)

$S \rightarrow Gr_p(W)$ を同語反復ベクトル束とすれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ は自然に W をファイバーとして持つ階数 N の自明束 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束とみなせる。したがって、商ベクトル束として、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を得る。

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i_S} \underline{W} \xrightarrow{\pi_Q} Q \rightarrow 0.$$

ここでは、ベクトル束 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を **普遍商束** ということにする。

ここで、 W にその係数体に応じて、内積、もしくはエルミート積（簡単のため、以後スカラー積という）を入れる。すると、 $Gr_p(W)$ にはリーマン対称空間としての構造が入るが、さらにベクトル束 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にもファイバー計量 g_S, g_Q が入る。また、 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の積接続を利用すれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にも接続が導入されるが、これは標準接続といわれるものと一致する。

球面 S^{N-1} をグラスマン多様体 $Gr_{N-1}(\mathbf{R}^N)$ とみなしたときには、同語反復束 $S \rightarrow S^{N-1}$ は接ベクトル束 $TS^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$ であり、普遍商束 $Q \rightarrow S^{N-1}$ は階数 1 の実自明束である。また、標準埋め込み $S^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ を考えれば、普遍商束は法ベクトル束ともみなせる。このとき、位置ベクトル $f(x)$ は、普遍商束のリーマン多様体への引き戻し束の切断とみなせることに注意する。すると、その微分はどのように解釈できるだろうか？

そのためにベクトル束の第 2 基本形式を定義する。ベクトル空間 W のスカラー積を用いて定義されるベクトル束としての準同型を $\pi_S : \underline{W} \rightarrow S$, $i_Q : Q \rightarrow \underline{W}$ とおく。前者は直交射影であり、後者は $S \rightarrow Gr_p(W)$ の $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ における直交補空間をとることにより得られる $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束 $S^\perp \rightarrow Gr_p(W)$ と普遍商束を同一視することにより得られる。

さて、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ の切断 s を $i_S(s)$ と同一視することにより、 W に値をもつ関数とみなし、

$$H(s) := \pi_Q di_S(s)$$

と定義すれば、 H はベクトル束 $\text{Hom}(S, Q)$ に値をもつ 1-形式となる。 $H \in \Omega^1(\text{Hom}(S, Q))$ を **ベクトル束の第 2 基本形式** という [2]。同様にして $K := \pi_S di_Q \in \Omega^1(\text{Hom}(Q, S))$ も定義される。また、準同型 $\pi_Q : \underline{W} \rightarrow Q$ により、ベクトル空間 W はまた、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ の切断のなす空間とみなせることに注意する。

つぎに写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられたと仮定する。写像 f により、グラスマン多様体上のベクトル束やその計量、接続、第 2 基本形式を引き戻すことにする。すると、この誘導接続と M のリーマン計量により、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断に作用するラプラス作用素 Δ が定義される。また、ベクトル空間 W は、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断のなす集合ともみなせる。

再び球面 S^{N-1} を例にとる。切断 $f(x)$ の微分は接ベクトル束に値をとることを考えれば、 $df = di_Q f = Kf$ である。また、 $\mathbf{R}^N$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ を利用すれば、 $x_A = (e_A, f(x))$ なので、座標関数の引き戻しは引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断 $x_A f(x)$ と同一視される。このようにして、「高

「高橋の定理」をベクトル束とその切断、および切断に作用するラプラス作用素を利用することによって言い換えることが可能となる。

ここで、第2基本形式 H, K を使って、

$$A := \sum_{i=1}^n H_{e_i} K_{e_i} : f^*Q \rightarrow f^*Q$$

なるベクトル束としての準同型を定義し、**平均曲率作用素** ということにする。

定理 1.2. W にスカラー積を導入したときに、写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対する次の2条件は互いに同値である。

- (1) $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は調和写像である。
- (2) W に属する任意の切断 $t \in \Gamma(f^*Q)$ に対して、 $t(x) = 0$ ならば、 $(\Delta t)(x) = 0$ が成り立つ。

この条件の下、 $\Delta t = -At$ であり、 $2e(f) = -\text{trace } A$ が成り立つ。

もう少し「高橋の定理」に似せるためには、さらに仮定を必要とする。

定理 1.3. 定理 1.2 の仮定に加えて、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ はホロノミー既約であるとする。このとき、次の2条件は互いに同値である。

- (1) $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は調和写像であり、かつある関数 h が存在して $A = -hId$ となる。
- (2) ある関数 h が存在して、 W に属する任意の切断 t に対して、 $\Delta t = ht$ となる。

この条件の下、 $2e(f) = (N - p)h$ が成り立つ。

もはや、言うまでもないことだが、球面の場合には引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ は階数1なので、ホロノミー既約であり、平均曲率作用素 A は関数と同一視される。したがって、上の定理において、「ホロノミー既約性」と「 $A = -hId$ 」という条件は自動的にみたされることになるので言及不要となる。かくして、定理 1.3 は定理 1.1 と一致する。

本講演ではこの定理の応用について、とくに [1] の拡張にも言及したい。なお、証明の細部に関しては [3] を参照していただきたい。

2. 準備

まずは、グラスマン多様体のベクトル束の第2基本形式に関する補題を紹介する。

補題 2.1. ベクトル束の第2基本形式 H および K は平行であり、

$$g_Q(Hs, t) = -g_S(s, Kt), \quad s \in S, t \in Q$$

をみたす。

実グラスマン多様体のときには、その接ベクトル束は $S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{R}^N)$ と同型であり、また複素グラスマン多様体の場合には、その正則接ベクトル束が $S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ と同型になる。したがって、

(正則) 接ベクトル束のファイバー計量 g_{Gr} は $g_{S^*} \otimes g_Q$ となる。また、実グラスマン多様体の場合には、

$$H \in \Omega^1(\text{Hom}(S, Q)) = \Gamma(S \otimes Q^* \otimes S^* \otimes Q)$$

であるが、 $H = Id_S \otimes Id_Q$ であることがわかる。

複素グラスマン多様体の場合には、 H は $\text{Hom}(S, Q)$ に値をとる $(1, 0)$ 形式であるので、

$$H \in \Omega^{1,0}(\text{Hom}(S, Q)) = \Gamma(S \otimes Q^* \otimes S^* \otimes Q)$$

となり、やはり $H = Id_S \otimes Id_Q$ であることがわかる。 K も同様であり、 $K = -Id_S \otimes Id_Q$ となる。

すると、ファイバー計量 g_{Gr} はまた別の表示を持つことがわかる。

補題 2.2.

$$g_{Gr} = -\text{trace}_Q HK = -\text{trace}_S KH.$$

さて、次に n 次元リーマン多様体 (M, g) からグラスマン多様体への写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられているとする。ベクトル空間 W にスカラー積を導入し、グラスマン多様体に序論で説明したさまざまな幾何構造を考えることにする。

とくに、平均曲率作用素 $A \in \text{End}(f^*Q)$ の持つ性質を列挙する。

補題 2.3. 平均曲率作用素 A は非正な対称作用素、もしくはエルミート作用素である。

実際、 A の定義と補題 2.1 から、任意の $t \in f^*Q$ に対して、

$$g_{f^*Q}(At, t) = -\sum_{i=1}^n g_{f^*S}(K_{e_i}t, K_{e_i}t) = g_{f^*Q}(t, At)$$

である。

補題 2.4. 写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ のエネルギー密度 $e(f)$ は

$$2e(f) = -\text{trace} A$$

をみたす。

補題 2.2 より、

$$2e(f) = \sum_{i=1}^n g_{Gr}(df(e_i), df(e_i)) = -\sum_{i=1}^n \text{trace} H_{df(e_i)} K_{df(e_i)} = -\text{trace} A$$

となる。

最後に、 $f: M \rightarrow N$ をリーマン多様体間の写像としたときに、 $df \in \Omega^1(f^*TN)$ に対する微分 ∇df を写像 f の第 2 基本形式といい、

$$\tau(f) := \text{trace} \nabla df = \sum_{i=1}^{\dim M} (\nabla_{e_i} df)(e_i)$$

をテンション場という。テンション場が恒等的に消える ($\tau(f) \equiv 0$) とときに、 $f: M \rightarrow N$ は調和写像であるといい、第 2 基本形式が恒等的に消える ($\nabla df \equiv 0$) とときに、写像 $f: M \rightarrow N$ は全測地的であるという。

3. 主定理

グラスマン多様体への写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられているとして、ベクトル空間 W にスカラー積を導入する。

写像に対する変分問題がベクトル束の第2基本形式を利用して書き換えられることを見るために、ベクトル束の第2基本形式の引き戻し H のノルムの2乗を計算する。そのために、 $u_1, u_2, \dots, u_p$ を $f^*S \rightarrow M$ の局所正規直交枠であるとする。補題 2.1, 2.2 を利用すれば、

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^p g_{f^*Q}(H_{e_i}u_\alpha, H_{e_i}u_\alpha) = - \sum_{i=1}^n \text{trace}_{f^*S} K_{e_i} H_{e_i} \\ &= g_{Gr}(df(e_i), df(e_i)) = 2e(f) \end{aligned}$$

となる。さらに計算すれば、

$$\nabla H = H_{\nabla df}, \quad -\delta^\nabla H = H_{\tau(f)}$$

が成立することがわかる。 H がグラスマン多様体上では、 $Id_S \otimes Id_Q$ と同一視できたことを考慮することにより、次を得る。

命題 3.1.

$$\nabla H = 0 \iff \nabla df = 0, \quad \delta^\nabla H = 0 \iff \tau(f) = 0.$$

さて、次にベクトル束の全射準同型 $\pi_Q : \underline{W} \rightarrow Q$ により、 $W \subset \Gamma(Q)$ とみなすことができたが、切断を引き戻すことにより、

$$\begin{aligned} f^*\pi_Q : W &\rightarrow \Gamma(f^*Q), \\ w &\mapsto f^*\pi_Q(w), \quad w \in W \end{aligned}$$

が得られる。ここで、一般に $f^*\pi_Q$ の単射性は期待できないので、 $W \subset \Gamma(f^*Q)$ とは言えないことに注意する。しかし、 $w \in W$ は $f^*Q \rightarrow M$ の切断 $f^*\pi_Q(w)$ を定義するので、 $f^*\pi_Q(w)$ を W に属する $f^*Q \rightarrow M$ の切断と言うことにする。

ところで、 W がスカラー積を持つ場合には、別にベクトル束の全射準同型 $\pi_S : \underline{W} \rightarrow S$ を定義できた。これを利用することにより、

$$f^*\pi_S : W \rightarrow \Gamma(f^*S)$$

も定義できる。

したがって、 $w \in W$ は二つの切断、 $t \in \Gamma(f^*Q)$ と $s \in \Gamma(f^*S)$ を与える。このとき、切断 s と t を $w \in W$ に**対応する切断**という。

すると、 $w \in W$ に対応する切断 s と t に対して、 $dw = 0$ であることから、

$$\nabla s = -Kt, \quad \nabla t = -Hs$$

が成り立つことがわかる。この式から、 W に属する $f^*Q \rightarrow M$ の切断 t に対して、

$$\Delta t - H_{\tau(f)}s + At = 0$$

が成り立つことを導くことができる。定理 1.2 はこの式からすぐに導かれる。

球面の時には引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の階数が 1 であることから全く問題とならなかったが、 $f^*Q \rightarrow M$ は誘導接続に対して、一般にはホロノミー既約ではない。そこで、誘導接続のホロノミー群に対応する $f^*Q \rightarrow M$ の部分束への分解

$$f^*Q = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$$

を $f^*Q \rightarrow M$ のホロノミー分解ということにする。各部分束への直交射影を $\pi_l : f^*Q \rightarrow V_l$ とおく。

定義 3.2. 任意の $l = 1, 2, \dots, L$ に対して、 $\pi_l A = A \pi_l$ が成立しているときに、平均曲率作用素 $A \in \Gamma(\text{Hom } f^*Q)$ はホロノミー分解と**適合している**という。換言すれば、 A がホロノミー分解と適合しているとは、ベクトル束の準同型として、

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_L, \quad A_l \in \Gamma(\text{Hom } V_l)$$

が成り立つことである。

すると次の定理を得る。

定理 3.3. 定理 1.2 の仮定に加えて、平均曲率作用素 A が引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ のホロノミー分解 $f^*Q = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$ と適合していると仮定する。このとき、次の 2 条件は互いに同値である。

- (1) $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が調和写像であり、かつ $A_l = -h_l Id_{V_l}$ をみたす L 個の関数 $h_l (l = 1, \dots, L)$ が存在する。
- (2) L 個の関数 $h_l (l = 1, \dots, L)$ が存在し、 W に属する任意の切断 t に対して、

$$\Delta \pi_l(t) = h_l \pi_l(t)$$

が成り立つ。

この条件の下、

$$2e(f)(x) = \sum_{l=1}^L q_l h_l(x),$$

が成立する。ただし、 q_l は $V_l \rightarrow M$ の階数である。

定理 1.3 はこの定理の系として得られる。

REFERENCES

- [1] M.P.do Carmo and N.R.Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann.Math. **93** (1971), 43–62
- [2] S.Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)
- [3] Y.Nagatomo, Harmonic maps into Grassmannian manifolds, a preprint
- [4] T.Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380–385