２種類の対合をもつスペクトルデータによるクリフォードトーラスの構成について

北里大学・一般教育部　谷口　哲也 (Tetsuya Taniguchi)
College of General Education
Kitasato University

1　はじめに

本校はクリフォードトーラスのスペクトルデータによる構成方法を紹介する．本稿の１節から３節は Schmidit 流のスペクトルデータによるもので, Taimanov の Clifford torus に関する仕事 ([4]) を必要最小限に紹介したものである．ただし, 本校の３節は, 原論文に若干の計算修正を施したものである．４節は McIntosh 流のスペクトルデータによるものである．[6] の４節において McIntosh 流のスペクトルデータを用いたクリフォードトーラスの構成が可能であることが, アナウンスされたが, 本校の４節はこれの詳説である．

最初に, Schmidt 流のスペクトルデータによるクリフォードトーラス構成に必要な, ワイエルシュトラスの表現公式について説明する．

$M = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2)$ を 2 次元トーラスとし, f を M から $\mathbb{R}^3$ への共形はめ込みとする．このとき f は次の大域的なワイエルシュトラスの表現公式をもつ.

$$f(z) = (\chi^1(z), \chi^2(z), \chi^3(z)), \quad k = 1,2,3,$$
$$\chi^k(z) = \chi^k(z_0) + \int_{z_0}^{z} \left(\chi_z^k(z)dz + \overline{\chi_z^k(z)}d\bar{z}\right),$$
$$\chi_z^1(z) = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2\right),\ \chi_z^2(z) = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2\right),\ \chi_z^3(z) = \psi_1\bar{\psi}_2,$$

ここで $z = x + \sqrt{-1}y$ は M の等温座標で

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

はスピノール束の大域的な切断で, 次で定義されるポテンシャル U 付きの Dirac 作用素の核となっている:

$$D_U = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

ちなみに, 曲面の計量を $g = e^{2\alpha}dzd\bar{z}$, H を平均曲率とすると, $U = He^{\alpha}/2$ となる.

Bloch-Floquet 理論をもちいると, この ψ から Schmidt 流のスペクトルデータの素となるスペクトル曲線が得られる ([4]).

Taimanov は, 次の Clifford トーラスが得られるような Schmidt 流のスペクトルデータを構成した (このスペクトルデータについては２節参照):

$$\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\sin x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\cos y}{\sqrt{2} - \sin y}\right) \quad (0 \leqq x, y \leqq 2\pi).$$

ちなみに, スペクトル曲線はリーマン球面で, ポテンシャル U は

$$U = \frac{\sin y}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sin y)}$$

で与えられる. とくに,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi^1 + i\chi^2\right) = \frac{i}{2}e^{ix}\frac{\sqrt{2} - \cos y - \sin y}{(\sqrt{2} - \sin y)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\chi^3 = \frac{i}{2}\frac{\sqrt{2}\sin y - 1}{(\sqrt{2} - \sin y)^2} \tag{1}$$

2 Schmidt 流のスペクトルデータと Baker-Akhiezer 関数

この節では Schmidt 流のスペクトルデータの定義を紹介し, それに対応する Baker-Akhizer 関数の性質について述べる.

種数が g の 2 点 ∞_+, ∞_- 付コンパクトリーマン面 R と 2 点 ∞_+ と ∞_- のそれぞれに対して, その点の周りの座標 k_+^{-1} と k_-^{-1} を考える. ただし, 条件 $k_\pm^{-1}(\infty_\pm) = 0$ (複合同順) をみたすものとする. $R^* = R \setminus \{\infty_+, \infty-\}$ とおき, R^* 上の n 個の因子 $D_k = a_{k1}Q_{k1} + \ldots + a_{km_k}Q_{km_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$ を考える. D_k の次数を d_k とし $d = \sum_{l=1}^n d_k$ とおく.

定義 2.1 R 上の次の条件を満たす有理型関数 ϕ 全体に Serre の意味で対応する曲線を $R_{D_1,\ldots,D_n}$ と表すことにする:

$$\phi(Q_{k1}) = \cdots = \phi(Q_{km_k}), \quad \partial^r\phi(Q_{kl}) = 0,$$
$$k = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, m_k, \ r = 1, \ldots, (a_{kl} - 1).$$

またこれらの有理型関数を $R_{D_1,\ldots,D_n}$ 上の有理型関数と呼ぶことにする.

この特異曲線 $R_{D_1,\ldots,D_n}$ は大雑把にいえば, それぞれの因子 $D_k = a_{k1}Q_{k1} + \ldots + a_{km_k}Q_{km_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$ に現れる R 上の m_k 個の点 $Q_{k1}, \ldots, Q_{km_k}$ を重複度 $a_{k1}, \ldots, a_{km_k}$ を考慮しつつ, 張り合わせて 1 つの特異点 S_k にすることにより得られるものである ([3]).

定理 2.2 スペクトルデータと呼ばれる次の組 $\underline{(R_{D_1,\ldots,D_n}, E = P_1 + \ldots + P_{g+1+d-n}, \infty_+, \infty_-, k_+, k_-)}$ に対して, 次の条件 (1), (2), (3) を満たす, 2 次元平面 $\mathbf{R}^2 \cong \mathbb{C}$ のパラメタ $z = x + \sqrt{-1}y$ に依存した R 上の $\mathbf{C}^2$ に値を取る関数 $\psi(z, \bar{z}, p) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, \bar{z}, p) \\ \psi_2(z, \bar{z}, p) \end{pmatrix}$ が一意的に定まる. ただし E は一般的な因子とする. (この関数 $\psi(z, \bar{z}, p)$ は $R_{D_1,\ldots,D_n}$ 上の Baker-Akhiezer 関数と呼ばれる.)

(1) $\psi(z, \bar{z}, \cdot)$ を複素直線束 $\mathcal{O}(E)$ の切断とみなしたとき, R^* 上で正則になっている.

(2) ψ は 2 点 ∞_+, ∞_- において次の漸近展開 (A) をもつ.

$$\exp(-k_+z)\psi = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \end{pmatrix} k_+^{-1} + O(k_+^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-k_-\bar{z})\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1^- \\ \xi_2^- \end{pmatrix} k_-^{-1} + O(k_-^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_-.$$

3 z を固定して, ψ_1, ψ_2 を p の関数とみなしたとき, それらはそれぞれ, $R_{D_1,\dots,D_n}$ 上の有理型関数である.

3 クリフォードトーラスを生成する Schimidt 流のスペクトルデータ

R として リーマン球面 $R = \{\lambda \in \mathbb{C}\} \cup \infty$ をとり, さらに $\infty_+ = \infty$, $\infty_- = 0$, $k_+ = \lambda$, $k_- = |u|^2/\lambda$, $D_1 = (u) + (-\overline{u})$, $D_2 = (-u) + \overline{u}$, $E = P_1 + P_2 + P_3$ とおく. ただし

$$u = \frac{1+i}{4},\ P_1 = \frac{-1+i+\sqrt{-2i-4}}{4\sqrt{2}},\ P_2 = \frac{-1+i-\sqrt{-2i-4}}{4\sqrt{2}},\ P_3 = 1/\sqrt{8}.$$

Iskander A. Taimnov はスペクトルデータとして, $(R_{D_1,D_2}, E, \infty_+, \infty_-, k_+, k_-)$ を選び. さらに定理 2.2 を用い, このスペクトルデータ に対応する R_{D_1,D_2} 上の Baker-Akhiezer 関数 $\psi(z,\bar{z},p)$ を構成し, p に $\bar{u}$ を代入したものを $\psi(z,\bar{z},u) = {}^t(\psi_1,\psi_2)$ として, それらを計算し, 次を得た.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{4} e^{-(ix/2)} \dfrac{2e^{iy/2} + \sqrt{2}(1-i)e^{-(iy/2)}}{\sin y - \sqrt{2}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4} e^{-(ix/2)} \dfrac{2e^{iy/2} - \sqrt{2}(1+i)e^{-(iy/2)}}{\sin y - \sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1 節のスピノール束の大域切断 ψ として, これを選び, ワイエルシュトラスの表現公式を用いて, 適切な等長変換を施すと, クリフォードトーラスが得られることが示される. 実際, スペクトルデータから構成された, ψ_1, ψ_2 を用いたポテンシャル U に関する公式 $U = \bar{\partial}\psi_1/\psi_2$ を用いて計算すると,

$$U = \frac{\sin y}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sin y)} \tag{2}$$

となり, 1 節の U と一致する. 次に, $\Psi = \psi/\sqrt[4]{2}$ とし, この Ψ にワイエルシュトラスの表現公式を適用して得られたはめ込みを $(A,B,C)\colon M = \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}) \to \mathbb{R}^3$ とする. さらに,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{3}$$

とおき,

$$\frac{\partial}{\partial z}(X + iY), \quad \frac{\partial}{\partial z} Z$$

をそれぞれ計算すると 1 節の式 (1) の各式の右辺と一致することにより, (X,Y,Z) はクリフォードトーラスとなることがわかる.

(注意. 式 (2), (3) は原論文 [4] におけるものに若干の修正を施したものである.)

4 McIntosh 流のスペクトルデータによるクリフォードトーラスの構成

最後に McIntosh 流 のスペクトルデータを用いても, クリーフォードトーラスが得られることを説明する. McIntosh によるスペクトルデータは次の三つ組 $(X, \pi, \mathcal{L})$ で与えられる. ここで X は反正則対合 ρ_X をもつ代数曲線, π は X 上の有理型関数, $\mathcal{L}$ は X 上の複素直線束で, ある性質を満たすものである (cf. [1], [2]). 特に, X がコンパクトリーマン面である場合のスペクトルデータは次の性質を持つものとして記述される (cf. [5]).

1. X は種数 p のコンパクトリーマン面で反正則対合 ρ_X を持つ. ρ_X の不動点集合を X^ρ とおくとき, $X \setminus X^\rho$ が 2 つの連結成分 X^N, X^S に分かれる. さらに, X^ρ は $b(x)$ 個の S^1 の直和 $X^\rho = \prod_{i=1}^{b(X)} S_i^1$ となる.

2. π は degree $n+1$ の有理型関数ですべての極が X^N に含まれ, すべての零点は X^S に含まれる. またはすべての極が X^S に含まれ, すべての零点は X^N に含まれる. さらに, π は零点の位数 m が 2 以上の点 P_0 をもち, 不動点集合 X^ρ のある点 x が存在し $|\pi(x)| = 1$ となる. さらに極の集合は零点の集合の ρ_X による像となる.

3. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ は X 上の degree $p+n$ の複素直線束で

$$D + \rho_X(D) \cong R, \quad \delta(\mathcal{L}) = 0.$$

   ただし, R は π の分岐因子で, $\mathcal{L}$ のデルタ種数 $\delta(\mathcal{L})$ は次で定義される.

$$\delta(\mathcal{L}) = b(X) - |\sharp\{s_i \in \Lambda \mid g(s_i)/g(s_1) > 0\} - \sharp\{s_i \in \Lambda \mid g(s_i)/g(s_1) < 0\}|.$$

   ここで, g は $(g) = D + \rho_{X*}D - R$ となる有理型関数で, Λ は $b(X)$ 個の点 $s_1, s_2, \ldots, s_{b(X)}$ からなる集合で, 各 i $(1 \leqq i \leqq b(x))$ に対して, $s_i \in S_i^1$ かつ $g(s_i) \neq 0, \infty$.

このスペクトルデータに対して, $\mathbb{R}^2$ から n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ への調和写像 $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ が対応する.

さらに, X が ρ_X とは別の反正則対合 $\nu\colon X \to X$ をもち, 次の性質が満たされるとき, ある $\mathbb{C}P^n$ の等長変換 σ が存在して, $\sigma \circ \psi$ は, n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ への調和写像となる.

4. $\pi \circ \nu = 1/\bar{\pi}$.

5. ν は ρ_X と可換で, $\nu(P_0) = P_\infty$. ただし, $P_\infty = \rho_X(P_0)$.

ちなみに, 条件 4 において ν を ρ_X に置き換えた条件は, 条件 1, 2, 3 から自動的に満たされる.

次に, 5 つの条件をみたすスペクトルデータをうまく選び, クリフォードトーラスを構成する. R を 3 節におけるリーマン球面とし, $X = R$, $\pi(\lambda) = \lambda^4$, $\mathcal{L}$ は次数 3 の複素直線束とすると, 条件 1, 2, 3 がみたされ, 3 次元の複素射影空間への写像,

$$\psi = [\psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4]$$

$$\psi_i = \exp(\eta_i^{-1} z/2 - \eta_i \bar{z}/2)/\sqrt{2}, \quad \eta_1 = 1, \eta_2 = i, \eta_3 = -1, \eta_4 = -i.$$

が得られる．このとき, $\rho_X(\lambda) = 1/\bar{\lambda}$ の他に ρ と可換な反正則対合 $\nu(\lambda) = -1/\bar{\lambda}$ を考えることができ, 条件 4, 5 が満たされる．したがって, 適切な等長変換により, この写像は 3 次元の実射影空間への写像となる．実際,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}i} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}i} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}i} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \left[\frac{\cos x}{\sqrt{2}} : \frac{\sin x}{\sqrt{2}} : \frac{\cos y}{\sqrt{2}} : \frac{\sin y}{\sqrt{2}} \right], \quad (0 \leqq x, y \leqq 2\pi).$$

これは 3 次元球面へもちあげられることがわかり, これに立体射影

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_4}, \frac{x_2}{1 - x_4}, \frac{x_3}{1 - x_4} \right)$$

を施すと次の R^3 内のクリフォードトーラスが得られる．

$$\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\sin x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\cos y}{\sqrt{2} - \sin y} \right) \quad (0 \leqq x, y \leqq 2\pi).$$

参考文献

[1] I. McIntosh, *A construction of all non-isotropic harmonic tori in complex projective space*, Internat. J. Math. 6 (1995), 831-879.

[2] I. McIntosh, *Two remarks on the construction of harmonic tori in* $\mathbb{C}P^n$, Internat. J. Math. 7 (1996), 515-520.

[3] J-P. Serre, *Algebraic Groups and Class of Fields*, Graduate Texts in Math. 117, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1988.

[4] I. A. Taimanov, *Finite-Gap Theory of the Clifford torus*, International Mathematics Research Notices, (2005) 103–120.

[5] T. Taniguchi, *"Non-isotropic harmonic tori in complex projective spaces and configurations of points on Riemann surfaces"*
Tohoku Mathematical Publications 14, 1999

[6] T. Taniguchi, *"Finite gap theory of the Clifford torus"*
数理解析研究所講究録　1577, 97-103 (2008)

〒 228-8555 神奈川県相模原市北里 1-15-1　北里大学一般教育部

E-mail address: tetsuya@kitasato-u.ac.jp