曲面上の主分布およびある種の優決定系について

安藤　直也　(熊本大学大学院自然科学研究科)

1.　はじめに

M を 2 次元多様体とし, g を M 上の Riemann 計量とする. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は M 上の二つの 1 次元分布で, M の各点で g に関して互いに直交しているものとする. 本講演の主な目的は, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ を主分布とするように M を局所的にかつ等長的に空間にはめこむことはできるか, そしてはめこむことができるときはめこみは空間の等長変換との合成を除いて一意か, という問題について得た結果を報告することである.

M 上に与えられた g, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対し上述の問題について議論するために, 次の型の優決定系 (過剰決定系, over-determined system) に着目する:

$$F_u = \alpha + \beta e^F, \qquad F_v = \gamma + \delta e^{-F}, \tag{1}$$

但し α, β, γ, δ は $\boldsymbol{R}^2$ のある領域で定義された 2 変数関数である. この型の優決定系に着目する理由は曲面論の基本方程式である Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式にある. S は 3 次元空間型 N の曲面で, 臍点を持たないものとする. K を S の内在的曲率とし, k_1, k_2 を S の相異なる主曲率とする. また S の第一基本形式 g を局所的に曲率線座標 (u, v) を用いて $g = A^2du^2 + B^2dv^2$ と表すことにする. このとき Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式は次のように表される:

$$\begin{aligned} &k_1k_2 + L_0 = K = -\frac{1}{AB}\left\{\left(\frac{B_u}{A}\right)_u + \left(\frac{A_v}{B}\right)_v\right\}, \\ &(k_1)_v = -(\log A)_v(k_1 - k_2), \quad (k_2)_u = (\log B)_u(k_1 - k_2), \end{aligned}$$

但し L_0 は N の (一定) 断面曲率である. S の主曲率は零ではないとする (つまり $K \neq L_0$ とする). このとき Gauss の方程式を $k_2 = (K - L_0)/k_1$ と変形して Codazzi-Mainardi の方程式に代入することによって, $F := \log k_1^2$ が (1) の解であることがわかる, 但し α, β, γ, δ は次のように与えられる:

$$\alpha := 2(\log|K - L_0|B)_u,\ \beta := -2\frac{(\log B)_u}{K - L_0},\ \gamma := -2(\log A)_v,\ \delta := 2(K - L_0)(\log A)_v. \tag{2}$$

冒頭で与えられたような M, g, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ および実数 L_0 に対し, (M, g) の曲率 K は L_0 と等しくならないとする. そして α, β, γ, δ を(2) の中でのようにおく, 但し (u, v) は $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ を満たす局所座標で, A, B は $g = A^2du^2 + B^2dv^2$ によって定まる正値関数である. 曲面論の基本定理によると, 各点 $p \in M$ の近傍上で定まる優決定系(1) が解 F を持つならば, $k_1 := e^{F/2}$, $k_2 := (K - L_0)/k_1$ が主曲率であり, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ が対応する主分布であるように M を等長的にかつ局所的に N にはめこむことができ, はめこみは N の等長変換との合成を除いて一意である. 筆者は冒頭に挙げた問題について考察するために(1) の型の優決定系を調べた. 以下において, 得られた結果を説明したい.

2. (1) の解の存在について

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を 2 変数 u, v の滑らかな関数とする．このとき次を満たす滑らかな関数 a, b, c, d が存在する:

$$a_u = \alpha, \qquad e^{-b} b_u = \beta e^a, \qquad c_v = -\gamma, \qquad e^{-d} d_v = -\delta e^c. \tag{3}$$

命題 ([5]) (1) の解が存在することと, (3) および $a+b+c+d=0$ を満たす a, b, c, d が存在することは同値である．さらに, (1) の解 F が存在するならば, (3) および $F = a+b = -c-d$ を満たす a, b, c, d が存在する; (3) および $a+b+c+d=0$ を満たす a, b, c, d が存在するならば, $F := a+b = -c-d$ は(1) の解である．

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が(2) の中でのように与えられている場合に上の命題を適用することによって, 次の定理を得る．

定理 ([5]) M を 2 次元多様体とする．g を M の Riemann 計量とし, 曲率 K は $L_0 \in \boldsymbol{R}$ と等しくならないとする．また $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は M 上の二つの 1 次元分布で, M の各点で g に関して互いに直交しているものとする．このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) M の各点のある近傍は $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ を主分布とするように等長に N にはめこまれる;

(b) M の各点 p のある近傍上 $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ および次を満たす局所座標 (u, v) が存在する:

$$(K-L_0)^2 EG = \left(\int_{v_0}^{v} (K-L_0) E_v dv + 1 \right) \left(\int_{u_0}^{u} (K-L_0) G_u du + 1 \right),$$

但し E, G は $g = Edu^2 + Gdv^2$ で与えられ, (u_0, v_0) は p に対応する．

3. (1) の整合条件

Φ, Ψ を $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D 上で定義された滑らかな関数とする．また F は 2 変数 u, v の滑らかな関数で, 次の優決定系の解であるとする:

$$F_u = \Phi(u, v, F), \qquad F_v = \Psi(u, v, F). \tag{4}$$

$F_{uv} = F_{vu}$ から,

$$\Phi_v(u,v,F) + \Phi_w(u,v,F)\Psi(u,v,F) = \Psi_u(u,v,F) + \Psi_w(u,v,F)\Phi(u,v,F)$$

がわかる．優決定系(4) の <u>整合条件 (compatibility condition)</u> とは, D 上の Φ と Ψ の関係式 $\Phi_v + \Phi_w \Psi = \Psi_u + \Psi_w \Phi$ である．

定理 ([8, pp. 393]) Φ, Ψ が(4) の整合条件を満たすならば, 各 $(u_0, v_0, w_0) \in D$ に対し $\boldsymbol{R}^2$ における (u_0, v_0) のある近傍上の(4) の解 F で $F(u_0, v_0) = w_0$ を満たすものが唯一つ存在する．

Φ, Ψ が

$$\Phi(u,v,w) := \alpha(u,v) + \beta(u,v)e^w, \qquad \Psi(u,v,w) := \gamma(u,v) + \delta(u,v)e^{-w}$$

と表されるとする, 但し α, β, γ, δ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U 上の滑らかな関数である. このとき $D = U \times \boldsymbol{R}$ であり, (1) の整合条件は $Xe^w + Y + Ze^{-w} = 0$ で与えられる, 但し

$$X := \beta_v + \beta\gamma, \qquad Y := \alpha_v - \gamma_u + 2\beta\delta, \qquad Z := -\delta_u + \alpha\delta$$

である. 整合条件は任意の $(u, v, w) \in D$ で成り立つというものなので, (1) の整合条件は α, β, γ, δ に関する三つの関係式 $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$, $Z \equiv 0$ で与えられる.

α, β, γ, δ が(1) の整合条件を満たすとする. $\beta \equiv 0$ かつ $\delta \equiv 0$ が成り立つ場合には, 滑らかな関数 F が存在して(3) および $a + b + c + d = 0$ を満たす a, b, c, d を $a := F$, $b := 0$, $c := -F$, $d := 0$ で与えることができる. $\beta \equiv 0$ かつ $\delta > 0$ が成り立つ場合には, 1 変数関数 T が存在して a, b, c, d を

$$\begin{aligned} &a := \log\delta + T(v) + \log\left(\int_{v_0}^{v} e^{-T(v)} dv + C_0\right), \\ &b := 0, \qquad c := -\log\delta - T(v), \qquad d := -\log\left(\int_{v_0}^{v} e^{-T(v)} dv + C_0\right) \end{aligned}$$

で与えることができる, 但し $C_0 > 0$ である. $\beta < 0$ かつ $\delta > 0$ が成り立つ場合には, $\Psi(u, v) = -\log(S(u) + T(v))$ と表され $\Psi_u > 0$, $\Psi_v > 0$ を満たす滑らかな関数が存在して a, b, c, d を $a := \log\delta$, $b := -\log\Psi_v$, $c := \log|\beta|$, $d := -\log\Psi_u$ で与えることができる ([5]). いずれの場合にも, [4] で得た(1) の解の表示を a, b, c, d から再び得ることができる.

$\beta\delta < 0$ のとき, (1) の整合条件から $\psi := \log|2\beta\delta|$ は Liouville の方程式 $\psi_{uv} = e^{\psi}$ の解であることがわかる. 一般に, Liouville の方程式の解 ψ が与えられたとき, 滑らかな負値関数 β に対し $\delta := e^{\psi}/2|\beta|$, $\alpha := (\log\delta)_u$, $\gamma := -(\log|\beta|)_v$ とおくと, α, β, γ, δ は(1) の整合条件を満たす. このとき前段落の中での議論に注意して, $e^{\psi} = 2S'(u)T'(v)/(S(u) + T(v))^2$ を得る. こうして Liouville の方程式の一般解を得ることができる.

α, β, γ, δ は $L_0 = 0$ とおいた(2) の中でのように与えられているとし, さらに(1) の整合条件を満たすとする. このとき $\beta\delta \equiv 0$ が成り立つ ([4], [6, pp. 277–281], [7, pp. 152–153]). $\beta\delta \equiv 0$ は, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ のいずれかの積分曲線が全て測地線であることを意味する. よって $\mathcal{D}_2$ の積分曲線が測地線であるとすると, $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ を満たす局所座標 (u, v) をうまく選ぶことで g を局所的に $g = A^2du^2 + dv^2$ と表すことができる. さらに (必要ならば座標 u を取り直して)(1) の整合条件を用いて, A を $A = A_1(u)A_2(v) + 1$ と表すことができる ([3]). 逆に $A := A_1(u)A_2(v) + 1$, $B := 1$ に対し, $L_0 = 0$ とおいた(2) の中でのように与えられる α, β, γ, δ は(1) の整合条件を満たす. このような α, β, γ, δ に対し(1) の解の各々が定める 3 次元 Euclid 空間 E^3 内の曲面は molding surface でありかつ主方向平行曲面である. S は E^3 内の曲面で, 臍点を持たずそして Gauss 曲率が零にはならないものとする. このとき S が <u>molding</u> であるとは, S が次の条件を満たす曲面の族 $\{S_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ に含まれるときにいう: t_1, $t_2 \in \boldsymbol{R}$ に対し, S_{t_1} から S_{t_2} への等長写像が存在して曲率線を曲率線にうつす; 異なる t_1, $t_2 \in \boldsymbol{R}$ に対し, S_{t_1} と S_{t_2} は E^3 において合同ではない. S が molding であることと S 上に現れる優決定系(1) の整合条件は同値である. S が <u>主方向平行 (parallel curved)</u> であるとは, E^3 内の平面 P が存在して S

の各点での主方向の一つが P に平行であるときにいう. S が主方向平行であることと, S の各点の近傍上の曲率線座標 (u, v) で $A = A_1(u)A_2(v) + 1$ および $B \equiv 1$ を満たすものが存在することは同値であるが, この状況では S が単に主方向平行であることだけではなく, S の各点のある近傍が「標準的な」主方向平行曲面であることもわかる ([3]). 以上から, S が主方向平行であることと S 上に現れる優決定系(1) の整合条件は同値であることがわかる.

4. (1) がちょうど二つの解を持つ場合

α, β, γ, δ を 2 変数の滑らかな関数とし, (1) はちょうど二つの解を持つとする. このとき $X \neq 0$, $Z \neq 0$ および $Y^2 - 4XZ > 0$ が成り立つ. ここで

$$P := -\frac{Y}{2X}, \qquad Q := \frac{\sqrt{Y^2 - 4XZ}}{2X}$$

とおく. このとき $P + Q$, $P - Q$ は共に正値であり, (1) の二つの解は $\log(P + Q)$, $\log(P - Q)$ と表される.

命題 ([5]) 次の (a), (b) は同値である:

(a) $\gamma \equiv 0$ を満たす(1) がちょうど二つの解を持つ;

(b) 優決定系

$$p_u = \alpha p + \beta(p^2 + q^2), \qquad p_v = \delta, \qquad q_u = \alpha q + 2\beta pq, \qquad q_v = 0 \tag{5}$$

が整合条件を満たさず, かつ(5) の解 (p, q) で $p + q$, $p - q$ が異なる正値関数であるようなものが存在する.

さらに, 上の (a) が成り立ち $\log(P + Q)$, $\log(P - Q)$ が二つの解であるならば, (5) の全ての解は (P, Q), $(P, -Q)$, $(P + Q, 0)$, $(P - Q, 0)$ で与えられる.

系 ([5]) 次の (a), (b) は同値である:

(a) $\gamma \equiv 0$ を満たす(1) がちょうど二つの解を持つ;

(b) 2 変数 u, v の滑らかな関数 p および 1 変数 u の滑らかな正値関数 q が存在して $p(u, v) > q(u)$ および次を満たす:

$$\alpha = \left(\log\left(\frac{p^2 - q^2}{q}\right)\right)_u, \quad \beta = -\frac{1}{2p}\left(\log\left(\frac{p^2 - q^2}{q^2}\right)\right)_u, \quad \delta = p_v, \quad \beta_v \neq 0.$$

F が(1) の解であることと, $F' = F + c$ が $F'_u = \alpha' + \beta' e^{F'}$, $F'_v = \delta' e^{-F'}$ の解であることは同値である, 但し c は $c_v = -\gamma$ を満たすものであり, $\alpha' := \alpha + c_u$, $\beta' := \beta e^{-c}$ および $\delta' := \delta e^c$ である. α, β, γ, δ が(2) の中でのように与えられているとき,

$$\alpha' = (\log(K - L_0)^2 A^2 B^2)_u, \quad \beta' = -\frac{(\log B^2)_u}{(K - L_0)A^2}, \quad \delta' = (K - L_0)(A^2)_v$$

が成り立つ. このとき上の系を用いて, 次の定理を得る.

定理 ([5]) M を 2 次元多様体とする. g を M の Riemann 計量とし, 曲率 K は零にはならないとする. また $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は M 上の二つの 1 次元分布で, M の各点で g に関して互いに直交しているものとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) M の各点 p に対し, p の近傍 U_p および U_p の E^3 への等長はめこみ ι_1, ι_2 で次を満たすものが存在する:

- (i) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は主分布を与える,
- (ii) E^3 の任意の等長変換 φ に対し, $\varphi \circ \iota_1 \neq \iota_2$ が成り立つ,
- (iii) U_p の E^3 への等長はめこみ ι で上の (i) を満たすものに対し, E^3 の等長変換 φ が存在して $\varphi \circ \iota$ は ι_1 または ι_2 に等しい;

(b) M の各点の近傍上 $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ および次を満たす局所座標 (u, v) が存在する:

- (i) g を局所的に $g = A^2du^2 + B^2dv^2$ と表したとき, A, B は $B_u/A = w_u$ および $A_v/B = w_v$ を満たす,
- (ii) w は零にならない滑らかな関数で, $(\log|\tanh w|)_{uv} \neq 0$ および sinh-Gordon 方程式 $w_{uu} + w_{vv} = -\sinh 2w$ を満たす.

各点 $p \in M$ に対し, 上の A, B として $A = B$ を満たすものを取ることができるとする. このとき ι_k による像は零ではない一定の平均曲率を持つ曲面である. そして k_1, k_2 が $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対応する ι_1 に関する主曲率であるならば, k_2, k_1 は $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対応する ι_2 に関する主曲率である.

参考文献

[1] N. Ando, A class of real-analytic surfaces in the 3-Euclidean space, Tsukuba J. Math., **26** (2002) 251–267.

[2] N. Ando, Parallel curved surfaces, Tsukuba J. Math., **28** (2004) 223–243.

[3] N. Ando, A two-dimensional Riemannian manifold with two one-dimensional distributions, Kyushu J. Math., **59** (2005) 285–299.

[4] N. Ando, Molding surfaces and Liouville's equation, preprint.

[5] N. Ando, Over-determined systems in relation to principal curvatures, preprint.

[6] R. L. Bryant, S. S. Chern and P. A. Griffiths, Exterior differential systems, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1 (1980) 219–338, Science Press, Beijing, 1982.

[7] E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, 2nd ed., Hermann, 1971.

[8] J. J. Stoker, Differential geometry, John Wiley & Sons, 1969.

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1　熊本大学大学院自然科学研究科

E-mail address: ando@sci.kumamoto-u.ac.jp