

# 向き付け不可能な極大曲面

藤森 祥一

## 極大面

$\mathbb{L}^3$  を  $(+, +, -)$  型の 3 次元 Minkowski 空間とする.  $\mathbb{L}^3$  内の空間的曲面で, 平均曲率が恒等的に消えているものを**極大曲面**という. 完備な極大曲面は平面に限られることが知られている ([1]) が, ある種の特異点を許容しその上で改めて完備性を定めることで, 完備な例が豊富に存在し大域的に興味深い性質を持つことが分かってきている ([2, 3, 9]).

極大曲面は, 3 次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  内の極小曲面と類似の表現公式をもつ. すなわち,  $M$  を Riemann 面,  $g$  を  $M$  上の有理型関数,  $\phi$  を  $M$  上の正則 1 形式で,  $(|g|^{-1} + |g|)^2 |\phi|^2$  が  $M$  上の正定値計量を定め, かつ  $|g|$  は恒等的には 1 にならないものとする. このとき,

$$X = \operatorname{Re} \int \left( \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right), \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \phi : M \longrightarrow \mathbb{L}^3 \quad (1)$$

は特異点をもつ極大曲面になる ([5]).

このような曲面を**極大面**と呼ぶ ([9]).  $(g, \phi)$  を  $X$  の Weierstrass data,  $g$  を  $X$  の Gauss 写像という.  $X$  による  $M$  への誘導計量は  $ds^2 = (|g|^{-1} - |g|)^2 |\phi|^2 / 4$  で与えられる. 従って,  $X$  の特異点集合は  $\{p \in M; |g(p)| = 1\}$  となる.  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面と  $\mathbb{L}^3$  の極大面とは局所的に類似の性質を多く持つが, 大域的には様々な違いが生ずる. 例えば [6] では, 極小曲面にはない極大面独自の例が構成されている.

**定義 1** ([9]).  $X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  を極大面,  $ds^2$  を  $X$  による  $M$  への誘導計量とする.  $M$  上のコンパクトな台をもつ対称  $(0, 2)$  テンソル場  $T$  が存在して,  $ds^2 + T$  が  $M$  の完備な Riemann 計量になるとき,  $X$  を**完備な極大面**と呼ぶ.

$X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  を完備な極大面,  $(g, \phi)$  をその Weierstrass data とする. このときあるコンパクト Riemann 面  $\bar{M}$  と有限個の点  $p_1, \dots, p_n \in \bar{M}$  が存在して,  $M$  は  $\bar{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$  と双正則になる ([9]).  $p_1, \dots, p_n$  は  $X$  の**エンド**に対応する (コンパクトな極大面は存在しない). さらに,  $g$  と  $\phi$  は  $\bar{M}$  に有理型に拡張される.

本稿の目的は向き付け不可能な極大面の考察である.

**定義 2.**  $M'$  を向き付け不可能な曲面とする.  $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  が**向き付け不可能な極大面**であるとは, Riemann 面  $M$  と二重被覆  $\pi : M \rightarrow M'$  が存在して,  $X = X' \circ \pi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  が極大面になることである. さらに  $X$  が完備のとき,  $X'$  は**完備**であるという.

---

本稿の内容は, Francisco J. López 氏 (グラナダ大学) との共同研究の成果 [4] による.

$X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  を向き付け不可能な極大面,  $\pi : M \rightarrow M'$  を  $M'$  の二重被覆とする.  $(g, \phi)$  を向き付け可能な極大面  $X = X' \circ \pi$  の Weierstrass data とする.  $I : M \rightarrow M$  を  $\pi$  に関する反正則デッキ変換とすると,  $M$  の各点  $p$  に対して  $X \circ I(p) = X(p)$  が成り立つ. これは

$$g \circ I = \frac{1}{\bar{g}} \quad \text{かつ} \quad I^* \phi = \bar{\phi}. \quad (2)$$

が成り立つことと同値である.

## Gauss 写像

**定義 3.**  $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  を向き付け不可能な極大面,  $\pi : M \rightarrow M'$  を  $M'$  の二重被覆とする.  $g$  を向き付け可能な極大面  $X = X' \circ \pi$  の Gauss 写像とする.  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の変換  $A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を  $A(z) = 1/\bar{z}$  で定める. また,  $p_0 : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$  を自然な射影とする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_0 \\ M' & \xrightarrow{\hat{g}} & (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle \end{array}$$

が可換となる共形写像  $\hat{g} = M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$  が一意に存在する. この  $\hat{g}$  を  $X'$  の Gauss 写像と呼ぶ.

向き付け不可能な極大面  $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  が完備ならば,  $\hat{g}$  は  $M'$  の各エンドに共形的に拡張される. さらに  $\hat{g}$  の写像度は  $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の写像度と等しくなる.

## 主結果

向き付け不可能な完備極大面の Gauss 写像に関して, 次の結果を得た.

**定理 4 ([4]).**  $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  を向き付け不可能な完備極大面,  $\hat{g} : M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$  を  $X'$  の Gauss 写像とする. このとき,  $\hat{g}$  の写像度は 4 以上の偶数になる.

**注意 5.**  $\mathbb{R}^3$  の向き付け不可能な完備極小曲面の場合は,  $\hat{g}$  の写像度と  $M'$  のコンパクト化の Euler 数との偶奇が等しくなることが知られている ([7]).

定理を示すために, 次の 2 つの事実を用いる.

**事実 6 ([7]).**  $M_1, M_2$  を境界のないコンパクト 2 次元多様体とし,  $p : M_1 \rightarrow M_2$  を分岐被覆とする.  $\chi(M_2)$  が奇数ならば,  $\chi(M_1) \equiv \deg p \pmod{2}$  が成り立つ.

**事実 7 ([8]).**  $\overline{M}$  をコンパクト Riemann 面,  $I : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  を固定点のない反正則対合とする. このとき,  $\overline{M}$  上の有理型関数  $h$  で  $h \circ I = -1/\bar{h}$  をみたすものが存在する.

**定理の証明の概略.**  $\pi : M \rightarrow M'$  を  $M'$  の二重被覆,  $I : M \rightarrow M$  を  $\pi$  に関する反正則デッキ変換,  $g$  を向き付け可能な極大面  $X = X' \circ \pi$  の Gauss 写像とする.  $M$  のコンパクト化を  $\bar{M}$  で表す. 事実 7 により  $h \circ I = -1/\bar{h}$  をみたす  $\bar{M}$  上の有理型関数  $h$  が存在する. そのような  $h$  を 1 つとる. 必要ならば Möbius 変換  $L(z) = (z+a)/(\bar{a}z-1)$  との合成を考えることにより,  $h$  は  $g$  の零や極で零も極ももたないと仮定できる. そこで  $\bar{M}$  上の有理型関数  $G$  を  $G(p) = g(p)h(p)$  ( $p \in \bar{M}$ ) で定めると,

$$G \circ I = (gh) \circ I = (g \circ I)(h \circ I) = (1/\bar{g})(-1/\bar{h}) = -1/\bar{G}$$

であるから, 事実 6 により

$$\chi(\bar{M}') \equiv \deg h \pmod{2}, \quad \chi(\bar{M}') \equiv \deg G \pmod{2}$$

が成り立つ.  $\deg G = \deg(gh) = \deg h + \deg g$  であるから

$$\deg h \equiv \deg h + \deg g \pmod{2}.$$

よって  $\deg \hat{g} = \deg g$  は偶数になる. さらに  $\deg \hat{g} = 2$  の例が存在しないことも示すことができる.  $\square$

## 例

$\hat{g}$  の写像度が 4 で,  $M'$  が Möbius の帯または Klein の壺から 1 点を除いたものとき, 我々は極大面の構成と分類を行った.

**例 8 (Möbius の帯).**  $M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $I(z) = -1/\bar{z}$  とする.

(i) Weierstrass data  $(g, \phi)$  を

$$g = z^3 \frac{z-1}{z+1}, \quad \phi = i \frac{z^2-1}{z^2} dz$$

で定めると (1) は  $M$  上 well-defined であり,  $(g, \phi)$  は (2) をみたす. よって  $\pi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{RP}^2 = (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle I \rangle$  を自然な射影として  $X' : M' = \mathbb{RP}^2 - \{\pi(0)\} \rightarrow \mathbb{L}^3$  を  $X = X' \circ \pi$  で定めると,  $X' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  は向き付け不可能な完備極大面を定める (図 1 の左参照).

(ii) Weierstrass data  $(g, \phi)$  を

$$g = z \frac{(rz-1)(sz-1)(tz-1)}{(z+r)(z+\bar{s})(z+\bar{t})},$$

$$\phi = i \frac{(rz-1)(z+r)(sz-1)(z+\bar{s})(tz-1)(z+\bar{t})}{z^4} dz$$

で定める. ただし  $r > 0$ ,  $s, t \in \mathbb{C} - \{0\}$  は定数で

$$r^2 + s^2 + t^2 + 4rs + 4st + 4tr = 0$$

かつ

$$(r^2 - 1) \{(|s|^2 - 1)(|t|^2 - 1) - s\bar{t} - \bar{s}t\} = r \{(|s|^2 - 1)(t + \bar{t}) + (|t|^2 - 1)(s + \bar{s})\}$$

をみたすものとする. このとき (1) は  $M$  上 well-defined であり,  $(g, \phi)$  は (2) をみたす. よって (i) と同様に  $X'$  を定めるとこれは向き付け不可能な完備極大面を定める (図 1 の右参照).

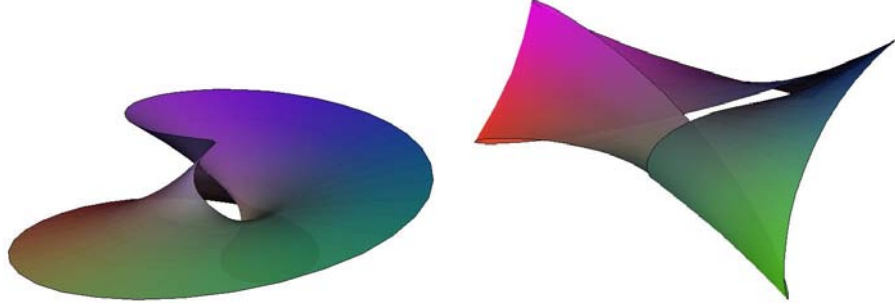


図 1: Möbius の帯型の極大面. 左: 例 8 の (i). 右: 例 8 の (ii) ( $r = 1, s = e^{2\pi i/3}, t = e^{-2\pi i/3}$ ).

**定理 9 ([4]).**  $\deg \hat{g} = 4$  で Möbius の帯型の極大面はこれらの例に限る.

**例 10 (Klein の壺  $-\{1$  点  $\}$ ).**  $r \in \mathbb{R} - \{0\}$  を定数として,

$$\bar{M} = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z \frac{rz - 1}{z + r} \right\}$$

とおく.  $\bar{M}$  は種数 1 のコンパクト Riemann 面である.  $M = \bar{M} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$  とする.  $I: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$  を  $I(z, w) = (-1/\bar{z}, -1/\bar{w})$  で定める.

$$g = w \frac{z+1}{z-1}, \quad \phi = i \frac{z^2 - 1}{z^2} dz$$

とすると,  $(g, \phi)$  は (2) をみたし, さらに (1) が  $M$  上 well-defined になるような  $r$  が 2 つ存在する. よって  $\pi: \bar{M} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \bar{M}/\langle I \rangle$  を自然な射影として  $X': M' = (\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) - \{\pi(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{L}^3$  を  $X = X' \circ \pi$  で定めると,  $X': M' \rightarrow \mathbb{L}^3$  は向き付け不可能な完備極大面を定める (図 2 参照).

**定理 11 ([4]).**  $\deg \hat{g} = 4$  で 1 つのエンドをもつ Klein の壺型の極大面は, この 2 つに限る.

## 参考文献

- [1] E. Calabi, *Examples of the Bernstein problem for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. **15** (1970), 223–230.

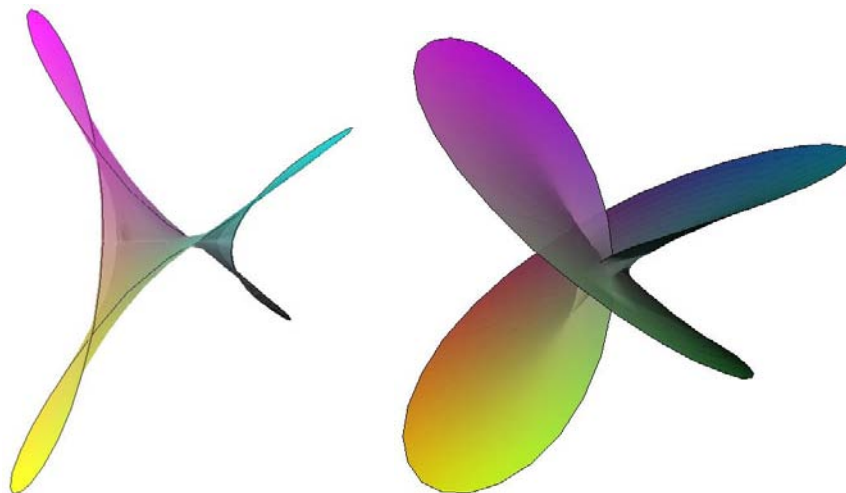


図 2: 1つのエンドをもつ Klein の壺型の極大面. 左:  $r \approx 0.17137$ . 右:  $r \approx 0.691724$ .

- [2] I. Fernández, F. J. López, *Periodic maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* , Math. Z. **256** (2007), 573–601.
- [3] I. Fernández, F. J. López and R. Souam, *The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Math. Ann. **332** (2005), 605–643.
- [4] S. Fujimori and F. J. López, *Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint, arXiv:0905.2113.
- [5] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [6] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3379–3390.
- [7] W. H. Meeks III, *The classification of complete minimal surfaces in  $R^3$  with total curvature greater than  $-8\pi$* , Duke Math. J. **48** (1981), 523–535.
- [8] M. Ross, *Complete nonorientable minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$* , Comment. Math. Helv. **67** (1992), 64–76.
- [9] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.

〒 811-4192 福岡県宗像市赤間文教町 1-1, 福岡教育大学 教育学部 数学教育講座  
*E-mail address:* fujimori@fukuoka-edu.ac.jp