対称三対の幾何学と Hermann 作用の軌道空間

井川 治 (福島高専)

京都大学数理解析研究所の松木敏彦先生に有益なご助言を頂きました.

定義 1. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の**対称三対 (symmetric triad)** であるとは次の条件 (1)~(6) を満たす場合を言う.

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系である.
(2) Σ は $\mathfrak{a}$ のルート系である.
(3) W は -1 倍に関して不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合で $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$.
(4) $l = \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$ とおくとき $\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.
(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma.$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W.$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする. $\tilde{\Pi}$ を $\tilde{\Sigma}$ の基本系とし $\tilde{\Pi}$ に関する正のルートの全体を $\tilde{\Sigma}^+$ と表し, $\Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$ とおく. Σ の単純ルートの全体を Π と表す.

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に対して

$$\Gamma = \left\{ X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}) \right\}$$

とおく.

定義 2. Γ の点を**全測地点**と呼ぶ.

定義 3. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ の対称三対とする.

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ が**同値**であるとは等長線形同型写像 $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ と $Y \in \Gamma$ が存在して $f(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma}'$ かつ

$$\begin{aligned}
\Sigma' - W' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\
&\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\}, \\
W' - \Sigma' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\
&\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

定義 4. $\mathfrak{a}$ の開集合 $\mathfrak{a}_r$ を次で定義する．

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

$\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**，$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$ の点を**特異点**という．$\mathfrak{a}_r$ の連結成分を**セル**という．

定義 5. $\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の **Affine Weyl 群**と言う．

命題 6. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対とする．$\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ はセルの全体に推移的に作用する．

命題 7. セル P_0 を任意に選び固定すると $\mathfrak{a} = \displaystyle\bigcup_{s \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)} s\overline{P_0}$.

定義 8. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とおく．写像 $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}^+$ で次の条件を満たすものを考える．

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), \quad n(\alpha) = n(-\alpha)$ であり

$$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, \quad n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W.$$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ のとき，$m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$
(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ のとき，$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$
(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ とする．
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が偶数のとき，$m(\lambda) = m(s_\alpha \lambda)$,
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が奇数のとき，$m(\lambda) = n(s_\alpha \lambda)$.

このとき，$m(\lambda), n(\alpha)$ をそれぞれ λ, α の**重複度**という．重複度が与えられた対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を**重複度付き対称三対**と言う．$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle)\lambda + \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \tan(\langle \alpha, H \rangle)\alpha.$$

とおき，m_H を H の**平均曲率ベクトル**という．

$$F(H) = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \log|\sin\langle \lambda, H \rangle| - \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \log|\cos\langle \alpha, H \rangle|$$

とおく．$\mathrm{Vol}(H) = \exp(-F(H)) (> 0)$ を H の**体積**と呼ぶ．

命題 9. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}, \sigma = (s, X)$ を Affine Weyl 群の元とし $H' = \sigma H \in \mathfrak{a}$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H$$

定義 10. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}$ が**極小**であるとは $m_H = 0$ となるときを言う．

定義 11. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三組とする．$H \in \mathfrak{a}$ が **austere 点**であるとは

$$\begin{aligned} &\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle) \ (\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \\ &\cup \{\alpha \tan(\langle \alpha, H \rangle) \ (\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \end{aligned} \quad (1)$$

によって定義される $\mathfrak{a}$ 内の部分集合が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるときを言う．

命題 12. 次が成り立つ．

(1) 全測地点は任意に与えた重複度に関して austere 点である．

(2) austere 点は極小点である．

定理 13. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．このとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次のいずれかの形になる．ただ一つ $\tilde{\alpha} \in W^+$ が存在して任意の $\lambda \in \Pi$ について $\tilde{\alpha} + \lambda \notin W$.

(I) $\Sigma \supset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(I-B_r)	B_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-C_r)	C_r^+	D_r^+	$e_1 + e_2$
(I-BC_r-A_1^r)	BC_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-BC_r-B_r)	BC_r^+	B_r^+	$e_1 + e_2$
(I-F_4)	F_4^+	F_4^+ の短いルート $\cong D_4^+$	e_1

(II) $\Sigma \subset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(II-BC_r) $(r \geq 1)$	B_r^+	BC_r^+	$2e_1$
(I'-C_r)	D_r^+	C_r^+	$2e_1$

(I') $\Sigma \neq W$ で (I),(II) 以外の場合

(I'-F_4) 型

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{F_4^+ \text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_2, e_3 \pm e_4\} \cong C_4, \\ W^+ &= \{F_4^+ \text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\}, \\ \tilde{\alpha} &= e_1 + e_3. \end{aligned}$$

(I'-B_r) 型 $(r \geq 3)$

$$\Sigma^+ = B_s^+ \cup B_{r-s}^+, \quad W^+ = (B_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(I'-BC_r-A_1^r) 型

$$\Sigma^+ = BC_s^+ \cup BC_{r-s}^+, \quad W^+ = (BC_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(III) $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ となる場合，$\tilde{\alpha}$ は $\tilde{\Sigma}$ の最高ルート.

同値関係

$$\text{(I-}F_4\text{)} \sim \text{(I'-}F_4\text{)}, \quad \text{(I-}BC_r\text{-}A_1^r\text{)} \sim \text{(I'-}BC_r\text{-}A_1^r\text{)},$$
$$\text{(I-}C_r\text{)} \sim \text{(I'-}C_r\text{)}, \quad \text{(I-}B_r\text{)} \sim \text{(I'-}B_r\text{)}$$

が成り立つ.

系 14. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対とする.

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \tilde{\alpha}, H \rangle < \frac{\pi}{2}, 0 < \langle \lambda, H \rangle \quad (\lambda \in \Pi) \right\}$$

とおくと P_0 はセルになる.

系 15. $H \in \overline{P_0}$ が全測地点となるための必要十分条件は任意の $\lambda \in \Sigma^+ \cap W^+$ に対して $\langle \lambda, H \rangle = 0$ または $\pi/2$ となることである.

系 16. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三組とする．$H \in \overline{P_0}$ が austere 点となるための条件は次を満たすことである.

(1) $\lambda \in \Sigma^+ - W^+$ に対して $\langle \lambda, H \rangle = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
(2) $\alpha \in W^+ - \Sigma^+$ に対して $\langle \alpha, H \rangle = 0, \pm\frac{\pi}{2}$.
(3) $\alpha \in \Sigma^+ \cap W^+$ に対して $\langle \alpha, H \rangle = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.
(4) $\langle \alpha, H \rangle = \frac{\pi}{4}$ となる $\alpha \in \Sigma^+ \cap W^+$ に対して $m(\alpha) = n(\alpha)$.

部分集合 $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して

$$P_0^{\Delta} = \left\{ H \in \overline{P_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \lambda, H \rangle > 0 \quad (\lambda \in \Delta \cap \Pi), \\ \langle \lambda, H \rangle = 0 \quad (\lambda \in \Pi - \Delta), \\ \langle \tilde{\alpha}, H \rangle \begin{cases} < \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \in \Delta \text{のとき}), \\ = \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \notin \Delta \text{のとき}) \end{cases} \end{array} \right\}$$

とおくと

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^{\Delta} \quad (\text{互いに素な和})$$

であり，$\Delta_1, \Delta_2 \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して $\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow P_0^{\Delta_1} \subset \overline{P_0^{\Delta_2}}$.

定理 17. 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対してただ一つの極小点 $H \in P_0^{\Delta}$ が存在する．

以上の考察を Hermann 作用の軌道空間に応用する．G を compact **単純** Lie 群とし，(G, K_1, K_2) を compact 対称三対とする．K_2 の compact 対称空間 $M_1 = G/K_1$ への自然な等長作用を Hermann 作用と言う．K_1 及び K_2 を定める二つの回帰的自己同型写像 θ_1 と θ_2 は**互いに可換**であると仮定する．更に θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わないと仮定する．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{m}_2$$

と 2 通りに標準分解する．極大可換部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ をとる．$\exp \mathfrak{a}$ は G 内のトーラスで $\pi_1 : G \to M_1$ で自然な射影を表すと Hermann 作用は $\pi_1(\exp \mathfrak{a})$ を切断とする超極作用である．$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H\rangle X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定め

$$\tilde{\Sigma} = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

とおく．各 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_1\theta_2$ で不変なので $\theta_1\theta_2$ の ± 1 固有空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \pm 1)$ に固有空間分解される．そこで

$$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}, \quad W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

とおく．$\alpha \in \Sigma, \lambda \in W$ に対して

$$m(\alpha) = \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1), \quad n(\lambda) = \dim \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

とおくと $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は重複度付き対称三対になる．$H \in \mathfrak{a}$ に対して K_2 軌道 $K_2\pi_1(\exp H)$ が全測地的，austere，極小になるための必要十分条件は H がそれぞれ全測地点，austere 点，極小点になることなので対称三対の考察を Hermann 作用の軌道空間の考察に応用することができる．その結果，どの点の軌道が全測地的または austere になるかを明示的に表現することができる．軌道空間は層分解され各層にただ一つの極小軌道が存在する．austere 軌道の多くは弱鏡映軌道になるが弱鏡映軌道の分類は出来ていない．以上のことは下の文献にもう少し詳しく解説してある．

参考文献

[1] 井川治，Hermann 作用の軌道空間の層分解とその応用，数理解析研究所講究録 **1668** (2009) 121–147.