複素2次超曲面に対するArnold-Givental予想の拡張について

入江 博

東京電機大学未来科学部

滑らかな閉多様体 L を考える．L 上の Morse 関数が少なくとも $SB(L, \mathbb{Z}_2)$[1] 個の臨界点をもつことは Morse の不等式としてよく知られている．Morse 関数 $f \in C^\infty(L)$ の臨界点集合

$$\mathrm{Crit}(f) := \{q \in L |\ df(q) = 0\}$$

は, df の余接束におけるグラフ

$$L_f := \{(q, df(q)) \in T^*L |\ q \in L\}$$

を考えることにより,

$$\mathrm{Crit}(f) = L_0 \cap L_f \quad \subset T^*L$$

と表すことができる．このとき, $(T^*L, \sum_i dq_i \wedge dp_i)$[2] はシンプレクティック多様体であり, 零切断 L_0 と L_f はともに閉ラグランジュ部分多様体になる．また, L_f は T^*L のハミルトンイソトピーにより L_0 に変形することができる．

次に述べる Arnold-Givental 予想は, Morse の不等式の驚異的な一般化と考えられる [3, 予想 5.120].

予想 1 (Arnold-Givental). (M, ω) をシンプレクティック多様体, L を M の反シンプレクティックな対合による固定点集合とする．L は空でなくコンパクトであるとする[3]．このとき, L と ϕL が横断的に交わるような M の任意のハミルトン微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について,

$$\#(L \cap \phi L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ． □

この予想は, M が余接束ではなくコンパクトな場合にも意味をもつ．例えば, 2 次元球面 (S^2, ω_{FS}) の大円 L を考えると, 曲面上のハミルトン微分同相は体積保存変換であるから, そのような変形で確かに 2 点以上で交わっている．このような例も予想 1 に吸収される．

---

[1] L の $\mathbb{Z}_2$ 係数のベッチ数の和を表す．

[2] $q_1, \ldots, q_n$ は L の局所座標, $p_1, \ldots, p_n$ はファイバー T_q^*L の座標を表す．

[3] L は, 空集合でなければラグランジュ部分多様体になる．

Arnold-Givental 予想は, Hofer, Givental, Y.-G.Oh 等の貢献の後に, 深谷-Oh-太田-小野氏による共同研究により完全な解決に肉薄する結果が得られている [2]. ここでは, 後の話に必要な Oh による結果を紹介する.

定理 2 (Oh [4]). $(G/K, \omega, J)$ を既約な[4] コンパクト型エルミート対称空間とし, τ を G/K の反正則な対合的等長変換とする. このとき, 実形 $L := \mathrm{Fix}\,\tau$ について[5] Arnold-Givental 予想は正しい.

Arnold-Givental 予想は, 一つのラグランジュ部分多様体 L とそのハミルトン変形 ϕL との交点数の評価に関するものだが, これを拡張して, ラグランジュ部分多様体 L_1 とそれとハミルトン同位でない別のラグランジュ部分多様体 L_2 に関して交点数 $L_1 \cap \phi L_2$ を考察することも可能である. 実際, 定理 2 を導く際に用いる Floer ホモロジーの理論はこの場合も扱えるように構成されている.

ところが, 一般に Floer ホモロジーを計算することは容易ではなく, L_1 と L_2 がハミルトン同位でない場合は次の G. Alston の結果が唯一のものである.

定理 3 (Alston [1]). 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}, J)$ の 2 つのラグランジュ部分多様体である実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ とクリフォードトーラス T^n を考える. $n = 2k-1$ とする. このとき, $\mathbb{R}P^n$ と ϕT^n が横断的に交わるような任意のハミルトン微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について,

$$\#(\mathbb{R}P^n \cap \phi T^n) \geq 2^k$$

が成り立つ. ここで, $T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] |\ |z_0| = \cdots = |z_n|\}$ である.

証明には, Floer ホモロジー群 $HF(\mathbb{C}P^n, T^n : \mathbb{Z}_2)$ を構成し, 計算することが必要である. $n = 2k$ の場合には, ディスクバブルの影響により Floer ホモロジー群が定義できないため交点数に関する結果が得られない.

今後, このような 2 種類のラグランジュ部分多様体の対に対するラグランジュ交叉の研究が発展していくことが期待される. そこで, 筆者は複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ に着目し次の予想を提出する.

予想 4 ($Q_n(\mathbb{C})$ の場合の拡張された Arnold-Givental 予想). $L_1,\ L_2$ を必ずしも合同でない複素 2 次超曲面 $(Q_n(\mathbb{C}), \omega, J)$ の 2 つの実形とする. このとき, L_1 と $\phi(L_2)$ が横断的に交わるような任意のハミルトン微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega)$ について,

$$\#(L_1 \cap \phi L_2) \geq \min\{SB(L_1, \mathbb{Z}_2),\ SB(L_2, \mathbb{Z}_2)\} \tag{1}$$

が成り立つ. □

$Q_n(\mathbb{C})$ を考える理由は, 複素射影空間の場合と対照的に実形の種類が多いこと及び, 正則等長変換 ϕ の下では (1) が等号になる, という田崎氏の結果 [5] があるためである.

---

[4] [2] により, 既約性の仮定は不要.
[5] この L は全測地的ラグランジュ部分多様体である.

さらに, コンパクト型エルミート対称空間の場合の研究へ向けての試金石にもなると思われる.

予想の解決のためには, Floer ホモロジー群 $HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2)$ を定義し, 計算する必要がある. まず, $n \geq 3$ のとき $Q_n(\mathbb{C})$ のすべての実形は最小 Maslov 数が 3 以上であることから, Floer ホモロジー群 $HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2)$ が定義できることが Oh による一般的な結果から従う. $Q_2(\mathbb{C}) \cong S^2 \times S^2$ の場合は, 実形 $S^1 \times S^1$ の最小 Maslov 数が 2 であるため Oh の一般論が使えないが, ディスクバブルが発生せず $HF(S^2, S^1 \times S^1 : \mathbb{Z}_2)$ が定義できることが具体的に確かめられる. まとめると,

命題 5 ($n \geq 3$ のとき Oh, $n = 2$ のとき入江)**.** $Q_n(\mathbb{C})$ の必ずしも合同でない 2 つの実形 L_1, L_2 について, Floer ホモロジー群 $HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2)$ は well-defined である.

今後の課題は, 構成された $HF(L_1, L_2 : \mathbb{Z}_2)$ を計算することだが, これが本質的な部分である. 現在, Floer チェイン複体の構造が比較的わかりやすい $L_1 \cong S^n$ の場合を研究中である.

参考文献

[1] G. Alston, *Lagrangian Floer homology of the Clifford torus and real projective space in odd dimensions*, arXiv:0902.0197.

[2] K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer Theory–Anomaly and Obstruction*, preprint 2008.

[3] 深谷賢治, **シンプレクティック幾何学**, 岩波書店.

[4] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[5] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, preprint.

H. Iriyeh
School of Science and Technology for Future Life
Tokyo Denki University
Kanda-Nishiki-Cho, Chiyoda-Ku
Tokyo, 101-8457
Japan
e-mail : hirie@im.dendai.ac.jp