曲面のガウス写像の分岐評価について

九州大学大学院数理学研究院 川上 裕* （Kawakami Yu）

部分多様体論・湯沢 2009

概 要

本稿では，3 次元双曲型空間の完備平坦波面の大域的性質として，双曲的 Gauss 写像の分岐評価とそのことを応用として得られる除外値数の評価を紹介する．

1 序

3 次元双曲型空間 $\mathbf{H}^3$ の平坦曲面の研究はこの十年で大きく進展した．実際，Gálvez, Martínez と Milán [GMM] は $\mathbf{H}^3$ の平坦波面に対する Weierstrass 型の表現公式を与えた．また，國分雅敏氏，梅原雅顕氏と山田光太郎氏は，[KUY1], [KUY2] において，ある種の特異点を許した平坦波面と呼ばれるクラスの大域的性質を与えた（波面の微分幾何的性質については [SUY] を見よ）．特に，双曲的 Gauss 写像による平坦波面の表現公式や完備なクラスにおける Osserman 型不等式など双曲的 Gauss 写像の性質が平坦波面の大域的性質に大きくかかわることを示す結果を与えた．また，この他にも平坦波面における特異点の判定条件 [KRSUY] やそのエンドの挙動 [KRUY2]，焦面の性質（[Ro], [KRUY1]）など興味深い結果が出されている．しかし，これまで双曲的 Gauss 写像の値分布についての結果は存在していなかった．

我々はこれまで曲面の Gauss 写像の値分布論的性質を調べてきた．特に，Nevanlinna [Ne] によって定義された，除外値数の拡張に当たる完全分岐値数について，[Ka1] では 2.5 となる代数的極小曲面が存在することを指摘し，[KKM] では，$\mathbf{R}^3$ の（擬）代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数に，[Ka2] では，4 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^4$ の（擬）代数的極小曲面の Gauss 写像に，そして [Ka3] では，$\mathbf{H}^3$ の（擬）代数的 CMC-1 曲面の双曲的 Gauss 写像に，それぞれ幾何的量による上限を与えた．

本稿では，$\mathbf{H}^3$ の完備平坦波面の双曲的 Gauss 写像の値分布論的性質として，[Ka4] で示した，その写像の完全分岐値数の幾何的量による評価式を与える．また，その結果を応用することで，いくつかの位相型において，双曲的 Gauss 写像の除外値数の上限を与えることができるので，その結果も合わせて紹介する．

*kawakami@math.kyushu-u.ac.jp, 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744

2 準備：3 次元双曲型空間の平坦波面とその完備性

本節では，主結果を理解する上で必要な $\mathbf{H}^3$ の完備平坦波面の基本的な性質について復習する．詳細については，[GMM]，[KRSUY]，[KRUY1]，[KRUY2]，[KUY1]，[KUY2] を参照せよ．

$\mathbf{L}^4$ を 4 次元 Lorentz-Minkowski 空間とし，その Lorentz 内積を

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \rangle_L = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,.$$

で定めることとする．このとき，3 次元双曲型空間 $\mathbf{H}^3$ は $\mathbf{L}^4$ の双曲面

$$\mathbf{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{L}^4 \,|\, -(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = -1, x_0 > 0\}$$

と見ることができる．実際，$\mathbf{L}^4$ からの Lorentz 内積を誘導することで，$\mathbf{H}^3$ は単連結完備で断面曲率が -1 の Riemann 多様体となる．単位接ベクトル束 $T^1\mathbf{H}^3 \subset \mathbf{H}^3 \times \mathbf{S}^3_1 \subset \mathbf{L}^4 \times \mathbf{L}^4$ （ここで，$\mathbf{S}^3_1 = \{x \in L^4 \,|\, \langle x, x \rangle_L = 1\}$ とする）となるので，$\mathbf{H}^3$ の波面は次のように定義される．

定義 2.1. 2 次元多様体 M から $T^1\mathbf{H}^3$ への Legendre はめ込み L，つまり，$L = (f, n) \colon M \to \mathbf{L}^4 \times \mathbf{L}^4$ で次の 3 つの条件を満たす写像を考える：

(1) $\langle f, f \rangle_L = 1$，$\langle f, n \rangle_L = 0$，$\langle n, n \rangle_L = 0$.

(2) L がはめ込みである．

(3) $L^*(\text{contact form}) = 0$，つまり，$\langle df, n \rangle_L = 0$.

この Legendre はめ込み $L = (f, n)$ の $\mathbf{H}^3$ への射影 f を**波面**（フロント，front）と呼ぶ.

M から $\mathbf{H}^3$ へのはめ込みは明らかに波面である．また，特異点を持つ場合にも波面となる例が沢山存在するので，波面は通常の曲面よりも広いクラスである．そこで，波面における平坦性を次のように定義する．

定義 2.2. 波面 $f \colon M \to \mathbf{H}^3$ が**平坦**（flat）であるとは，特異点を除いた部分では Gauss 曲率が 0 となるときをいう．

平坦波面は第二基本形式に同調する複素構造をもつ．以下，M をこの複素構造を用いて Riemann 面とみなす.

次に双曲的 Gauss 写像を定義する．波面 $f \colon M \to \mathbf{H}^3$ に対して，$f \pm n$ はそれぞれ光的ベクトルとなる．そこで，$f \pm n$ の定める理想境界 $\partial\mathbf{H}^3$ の元を $[f \pm n]$ と書く．$\partial\mathbf{H}^3$ は Riemann 球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と同一視することができるので，$[f \pm n] \colon M \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ とみなすことができる．これを**双曲的 Gauss 写像**（hyperbolic Gauss map）と呼び，$[f \pm n]$ をそれぞれ G，G_* と書くこととする．平坦波面についてはさらに次のことが成り立つ．

定理 2.3. 平坦波面 $f \colon M \to \mathbf{H}^3$ の双曲的 Gauss 写像 G，G_* はともに M 上の有理型関数となる．

最後に平坦波面における完備性とその大域的性質を紹介する．

定義 2.4. $f\colon M \to \mathbf{H}^3$ を平坦波面，ds^2 を f の第一基本形式とする．このとき，M 上コンパクトな台をもつ対称 $(0,2)$ テンソル場 T が存在して，ds^2+T が M 上の完備な Riemann 計量となるとき，f は**完備**（complete）であるという．

この定義による完備性の特徴として，特異点集合がコンパクトであることや任意の発散路が無限大の長さをもつことが挙げられる．また，平坦波面 $f\colon M \to \mathbf{H}^3$ が完備なとき，種数 γ のコンパクト Riemann 面 $\overline{M}_\gamma$ と有限個（k 個）の点 $p_1 \ldots, p_k \in \overline{M}_\gamma$ が存在し，M は $\overline{M}_\gamma \backslash \{p_1 \ldots, p_k\}$ と正則同型となる（[Hu], [GMM], [KUY2]）．この有限個の点が波面 f のエンドに対応する．エンドが**正則**（regular）であるとは，双曲的 Gauss 写像がそのエンドで有理型に拡張できるときをいう．すべてのエンドが正則のとき，次の Osserman 型不等式が成り立つ．

定理 2.5 (Kokubu-Umehara-Yamada [KUY2])**.** $f\colon M = \overline{M}_\gamma \backslash \{p_1 \ldots, p_k\} \to \mathbf{H}^3$ を完備平坦波面とし，そのエンドがすべて正則であるとする．d，d_* をそれぞれ G, G_* の $\overline{M}_\gamma$ 上の次数とする．このとき，

$$d + d_* \geq k$$

が成り立つ．さらに等号成立するとき，すべてのエンドが埋め込みとなる．

3　主結果：双曲的 Gauss 写像の分岐評価とその応用

主結果を述べる前に，有理型関数の完全分岐値数の定義を確認する．

定義 3.1 (Nevanlinna [Ne])**.** h を Riemann 面 M 上の有理型関数とする．値 $b \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ が h の**完全分岐値**（totally ramified value）であるとは，b が h の除外値か，b の h による逆像の点がすべて h の分岐点になるときをいう．h の完全分岐値の集合を $\{a_1, \ldots, a_{r_0}, b_{r_0+1}, \ldots, b_{r_0+l_0}\}$ とする．ここで，a_i は除外値，b_i は除外値でない完全分岐値とする．a_i については $\nu_i = \infty$, b_i については $h^{-1}(b_i)$ の各点における h の重複度の最小値を ν_i とする．特に $\nu_i \geq 2$ である．このとき，h の**完全分岐値数**（totally ramified value number）ν_h を

$$\nu_h = \sum_{a_i, b_i} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$$

で定義する．

この数は，Nevanlinna 理論における欠除指数（defect）に対応するものである（詳しくは，[JR], [Ne], [NO], [Ru] を参照せよ）．我々は，$\mathbf{H}^3$ の完備平坦波面の双曲的 Gauss 写像の完全分岐値数について，次の幾何的量による評価を得ることができた．

定理 3.2 ([Ka4])**.** $f\colon M = \overline{M}_\gamma \backslash \{p_1 \ldots, p_k\} \to \mathbf{H}^3$ を完備平坦波面とし，その双曲的 Gauss 写像を G，G_* とする．今，G と G_* がともに非定数で，$\nu_G > 2$ かつ $\nu_{G_*} > 2$ ならば，

$$\frac{1}{\nu_G - 2} + \frac{1}{\nu_{G_*} - 2} \geq \frac{k}{2\gamma - 2 + k}$$

が成り立つ．

この結果の興味深い点は，評価式の右辺の幾何的量に双曲的 Gauss 写像の情報が現れず，すべて曲面の位相的量で表されていることである．証明は，我々が [KKM] で得られた分岐評価を G, G_* に適用し，先に紹介した Osserman 型不等式（Theorem2.5）と組み合わせることで得られる．この評価を幾つかの位相型に適用することで，次のような双曲的 Gauss 写像の除外値数による非存在定理を示すことができる．

系 3.3 ([Ka4])**.** $f\colon M=\overline{M}_\gamma\backslash\{p_1\ldots,p_k\}\to\mathbf{H}^3$ を完備平坦波面とし，その双曲的 Gauss 写像を G，G_* とし，D_G, D_{G_*} をそれぞれ G，G_* の除外値数とする．このとき，次のことが成り立つ．
(1) $\gamma=0$ で，$D_G\geq 4$ かつ $D_{G_*}\geq 4$ となる完備平坦波面は存在しない．
(2) $\gamma=1$ で，$D_G\geq 5$ かつ $D_{G_*}\geq 5$ となる完備平坦波面は存在しない．

これらの結果が最良の評価であるかどうかは重要な問題であるが，まだわかっていない（[Ka4] では，最良の評価が成り立つときの完備平坦波面の位相的条件を与えている）．

参考文献

[GMM] J. A. Gálvez, A. Martínez, and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic* 3*-space*, Math. Ann., **316** (2000), 419–435.

[Hu] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13 – 72.

[JR] L. Jin and M. Ru, *Algebraic curves and the Gauss map of algebraic minimal surfaces*, Differ. Geom. Appl. **25**, (2007), 701 – 712.

[Ka1] Y. Kawakami, *On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces*, Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci., **82** (2006), 1–3.

[Ka2] Y. Kawakami, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces in* $\mathbf{R}^4$, Math. Nachr., **282** (2009), 211–218.

[Ka3] Y. Kawakami, *Ramification estimates for the hyperbolic Gauss map*, Osaka J. Math., **46** (2009), 1059–1076.

[Ka4] Y. Kawakami, *Value distribution of the hyperbolic Gauss maps of flat fronts in hyperbolic three-space*, to appear in Houston Journal of Mathematics, arXiv:0908.1307 and MI Preprint Series 2009-27.

[KKM] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Forum Math., **20** (2008), 1055–1069.

[KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math., **221** (2005), 303–351.

[KRUY1] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan, **59** (2007), 265–299.

[KRUY2] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic* 3*-space*, J. Math. Soc. Japan, **61**, (2009), 799–852.

[KUY1] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *An elementary proof of Small's formula for null curves in PSL(2,* $\mathbb{C}$*) and an analogue for Legendrian curves in PSL(2,* $\mathbb{C}$*)*, Osaka J. Math., **40** (2003), 697–715.

[KUY2] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math., **216** (2004), 149–175.

[Ne] R. Nevanlinna, Analytic Function, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1970.

[NO] J. Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Transl. Math. Monog. **80**, Amer. Math. Soc., 1990.

[Ru] M. Ru, Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation, World Sci. Publ. Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

[Ro] P. Roitman, *Flat surfaces in hyperbolic* 3*-space as normal surfaces to a congruence of geodesics*, Tohoku Math. J., **59** (2007), 21–37.

[SUY] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.