古典型既約対称空間の非平坦全測地的曲面

法政大学・理工学部 間下克哉

研究集会「部分多様体論・湯沢２００９」

古典型既約対称空間の，曲率が 0 でない全測地的曲面の分類を，$SU(2)$ の表現論を用いて行った．そのうちの AI 型，$AIII$ 型および BDI 型の場合について述べる．

1　$SU(2)$ の複素既約表現

準備として $SU(2)$ の複素既約表現について復習しておく．

$SU(2)$ のリー環の複素化の基底 H, X, Y を

$$[H,X]=X,\quad [H,Y]=-Y,\quad [X,Y]=H$$

を満たすようにとる．

命題 1　V を $SU(2)$ の $d+1$-次元複素既約表現とし，$\langle , \rangle$ を V 上の $SU(2)$-不変エルミット内積とする．$e_0 \in V$ を H の最大固有値 λ に対する固有ベクトルとする．このとき $\lambda = d$ であり，$Y^i \cdot e_0$ は H の $\lambda - 2i$ に対する固有ベクトルである．e_i を，$\frac{1}{\|Y^i \cdot e_0\|} Y^i \cdot e_0$ に絶対値が 1 の適当な複素数をかけたベクトルとするとき H, X, Y の e_0，$\cdots$，e_d に関する表現行列は以下のようになる．

$$H = \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & c'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c'_d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{ただし}\quad c'_i = \overline{c_i},\quad \|c_i\| = \sqrt{i(d-i+1)}.$$

2　全測地的曲面の分類

G をコンパクトリー群，θ を G の対合的自己同型とする．$\mathfrak{l}$ を L のリー環とし，

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\} \\ \mathfrak{p} &= \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\} \end{aligned}$$

とおく．

$\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の３次元リー部分環で

$$X_1 \in \mathfrak{k},\quad X_2,\ X_3 \in \mathfrak{p},\quad [X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2} \tag{1}$$

を満たす基底を持つものとする．

古典型の対称対の対合的自己同型は，体 K 上のベクトル空間 K^N の線形変換 F により $\theta(X) = F\circ X\circ F^{-1}$ と表される．U を $\mathfrak{u}$ が生成するリー部分群とし，K^N を U 不変既約部分空間の直和に分解する．このとき，直和成分 V をとると $F(V)$ も U-不変だから

$$V\cap F(V) = V \quad \text{or} \quad \{0\}$$

となる．

古典型既約対称空間について次が成り立つことが，個別の議論で示せる．

命題 2　U を G の 3 次元リー部分群で，リー環 $\mathfrak{u}$ が (1) を満たす基底を持つものとする．U の K^N への作用の不変既約部分空間による直交直和分解

$$K^N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

で，各成分 V_i が F 不変であるものが存在する．

3　AI 型

定理 3　$M = U/(U\cap SO(N))$ を $SU(N)/SO(N)$ の正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体とする．U による $\mathbf{C}^N$ の U-既約分解

$$\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{N_1}\oplus\cdots\oplus\mathbf{C}^{N_k}\oplus\mathbf{C}\oplus\cdots\oplus\mathbf{C} \quad (N_1\geq\cdots\geq N_k>1)$$

の各既約成分は $\mathbf{R}^N$ に関する共役線形写像で不変である．U のリー環の元 $X_1,\,X_2,\,X_3$ を

$$[X_1,\,X_2] = 2X_3,\ [X_2,\,X_3] = 2X_1,\ [X_3,\,X_1] = 2X_2$$
$$\tau\circ X_1 = X_1\circ\tau,\ \tau\circ X_2 = -X_2\circ\tau,\ \tau\circ X_3 = -X_3\circ\tau$$

を満たすものとする．このとき X_i の $\mathbf{C}^{N_i}$ への制限は $d = N_i - 1$ とおくとき

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_1 & = & \sqrt{d} + \sqrt{2(d-1)}\,G_{23} + \cdots + \sqrt{d}\,G_{d,d+1} \\ X_2 & = & i\,(d\,E_{11} + (d-2)\,E_{22} + \cdots + (-d)\,E_{d+1,d+1}) \\ X_3 & = & i\left(\sqrt{d}\,T_{12} + \sqrt{2(d-1)}\,T_{23} + \cdots + \sqrt{d}\,T_{d,d+1}\right) \end{array}\right.$$

ただし E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他は 0 である行列とし，$G_{ij} = E_{ij} - E_{ji},\,T_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ とする．

証明の概略

前半（すなわち命題 2) の証明は省略する．

U の $\mathbf{C}^n$ への作用は既約である，$X_1,\,X_2,\,X_3$ が (1) を満たすものとする．

$\mathfrak{k} = \mathrm{Skew}(n;\mathbf{R})$，$\mathfrak{p} = i\mathrm{Sym}(n;\mathbf{R})$ に注意する．

$H = -iX_2 \in \mathrm{Sym}(n;\mathbf{R})$ の固有値を $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ とすれば，$Ad(SO(n))$ の作用により $H = \mathrm{Diag}(a_1, a_2,\,\cdots, a_n)$ としてよい．

a_i はウェイト，e_i はウェイトベクトルであり

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \cdots = a_{n-1} - a_n = 2$$

である．

$$X = \frac{1}{2}(iX_3 + X_1),\quad Y = \frac{1}{2}(iX_3 - X_1),$$

は

$$[H, X] = X,\quad [H, Y] = -Y,\quad [X, Y] = H$$

を満たす．命題 1 により，X, Y の成分は符号を除いて定まる．

$h = \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\quad (\varepsilon_1 = \pm 1)$ の随伴作用により，X，Y のすべての成分を非負にできる．　■

4 $AIII$ 型

U を，$G = SU(p+q)$ の対合的自己同型

$$\theta(g) = I_{p,q} \circ g \circ I_{p,q}, \quad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

で不変な 3 次元単純リー部分群とする．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p+q), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{su}(p) + \mathfrak{su}(q) + \mathbf{R}$$

とし，U のリー環の基底 X_1, X_2, X_3 を (1) を満たす，すなわち

$$\begin{aligned} &I_{p,q} \circ X_1 = X_1 \circ I_{p,q}, \quad I_{p,q} \circ X_i = -X_i \circ I_{p,q} \ (i = 2,3) \\ &[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2} \end{aligned}$$

を満たすものとする．

命題 2 の証明の概略を，$AIII$ 型の場合について示す．

$\mathbf{C}^{p+q}$ を U-既約複素部分空間の直交直和に分解する

$$\mathbf{C}^{p+q} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

このとき $V_i \cap I_{p,q}(V_i) = \{0\}$ or V_i である．

$V_i \cap I_{p,q}(V_i) = \{0\}$ となる i に対して $V_i = V$ とおく．

$H = -iX_1$ の随伴作用により V をウェイト空間に分解する．

$H|_V = -i \ X_1|_V$ のウェイト $n-1, n-3, \cdots, -n+1$ に属する，長さが 1 のウェイトベクトル $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ をとって

$$\begin{aligned} V' &= \mathbf{C}u_0 \oplus \mathbf{C}v_1 \oplus \cdots \\ V'' &= \mathbf{C}v_0 \oplus \mathbf{C}u_1 \oplus \cdots \end{aligned}$$

ただし

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + (-1)^i I_{p,q} e_i), \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + (-1)^i I_{p,q} e_i)$$

とおけば，V' および V'' は U 既約で $V' = I_{p,q}V'$，$V'' = I_{p,q}V''$ を満たす． ■

G の 3 次元単純リー部分群 U は $\mathbf{C}^{p+q}$ に既約に働くとし，

$$H = -iX_1, \ X = \frac{1}{2}(X_3 + iX_2), \ Y = \frac{1}{2}(-X_3 + iX_2)$$

とおく．

$Ad(S(U(p) \times U(q)))$ により

$$H = \mathrm{Diag}(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_q)$$

ただし $a_1 > \cdots > a_p$, $b_1 > \cdots > b_q$ と仮定してよい．$\{a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q\}$ は H のウェイトである．ここで $a_1 > b_1$，即ち a_1 は最高ウェイトである，とする．

H のウェイト λ に属するウェイトベクトル v_λ が，$I_{p,q}v_\lambda = v_\lambda$ を満たせば λ は $a_1, \cdots, a_p$ のいずれかであり，$I_{p,q}v_\lambda = -v_\lambda$ を満たせば λ は $b_1, \cdots, b_q$ のいずれかであることに注意すると次がわかる．

- e_1 はウェイト a_1 に属するウェイトベクトルである．
- $I_{p,q} \circ Y = -Y \circ I_{p,q}$ だから，$Y \cdot e_1$ はウェイト b_1 に属するウェイトベクトルである．
- 同様に $Y^2 \cdot e_1$ は，ウェイト a_2 に属するウェイトベクトル．

- …

以上の手続きと命題 1 から X, Y の成分は，e^{i*} 倍の自由度を除いて決まる．

さらに，対角線上の成分が絶対値 1 である対角行列の作用を考えることにより次を示すことができる．

定理 4 (1) $M = U/(U \cap SO(N))$ を $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$ の正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体とする．U による $\mathbf{C}^N$ の U-既約分解

$$\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{N_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^{N_k} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C} \quad (N_1 \geq \cdots \geq N_k > 1)$$

の各既約成分を $I_{p,q}$ 不変となるようにとることができる．

(2) U が $\mathbf{C}^{p+q}$ に既約に働くとする．

このとき $|p-q| = 1$ である．

$X_1,\, X_2,\, X_3$ を

$$[X_1,\, X_2] = 2X_3,\ [X_2,\, X_3] = 2X_1,\ [X_3,\, X_1] = 2X_2$$
$$\tau \circ X_1 = X_1 \circ \tau,\ \tau \circ X_2 = -X_2 \circ \tau,\ \tau \circ X_3 = -X_3 \circ \tau$$

を満たすものとし

$$H = -iX_1,\ X = \frac{1}{2}(X_3 + iX_2),\ Y = \frac{1}{2}(-X_3 + iX_2)$$

とおく．$\mathbf{C}^{p+q}$ の適当な正規直交基底をとれば，H，X，Y はつぎのようになる．

$$\left\{\begin{array}{lcl} H & = & \mathrm{Diag}(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_q) \\ X & = & \sqrt{d}\, E_{1,p+1} + \sqrt{2(d-1)}\, E_{p+1,2} + \cdots + \sqrt{d}\, E_{p+q,p} \\ Y & = & \sqrt{d}\, E_{p+1,1} + \sqrt{2(d-1)}\, E_{2,p+1} + \cdots + \sqrt{d}\, W_{p,p+q} \end{array}\right.$$

例 5 ($SU(5)/S(U(3) \times U(2))$ の Lie triple system)

$$X_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6}\,i & -\sqrt{6}\,i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\,i \\ \hline -2\,i & -\sqrt{6}\,i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\,i & -2\,i & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X_3 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -2 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5 BDI 型

U を，$G = SO(p+q)$ の対合的自己同型

$$\theta(g) = I_{p,q} \circ g \circ I_{p,q}$$

で不変な 3 次元単純リー部分群とする．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+q), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(p) + \mathfrak{so}(q),$$

とし，U のリー環の規定 X_1, X_2, X_3 を (1) を満たす，すなわち

$$
\begin{aligned}
&I_{p,q}\circ X_1 = X_1\circ I_{p,q}, \quad I_{p,q}\circ X_i = -X_i\circ I_{p,q}\ (i=2,3)\\
&[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}
\end{aligned}
$$

を満たすものとする．

$\mathbf{R}^{p+q}$ を U の作用で既約分解について次が成り立つ．

命題 6 $\mathbf{R}^n$ の U-既約分解

$$\mathbf{R}^n = V_1\oplus\cdots\oplus V_k, \quad I_{p,q}(V_i) = V_i\ (1\le i\le k)$$

を，各既約成分 V_i が $I_{p,q}$-不変で，さらに V_i の複素化も U の（複素）既約可群であるようにとることができる．

G の $V=\mathbf{R}^{p+q}$ への作用は既約であるとし，$p+q=d+1=2d'+1$ とおく．

$Ad(SO(p)\times SO(q)$ により

$$
X_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
A_1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & A_{p'} & & & & & \\
 & & & (0) & & & & \\
\hline
 & & & & B_1 & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & B_{q'} & \\
 & & & & & & & (0)
\end{array}\right]
$$

ただし A_i, B_i は 2×2 交代行列，と仮定してよい．ここで，$\mathbf{R}^{p+q}$ の標準基底の番号付けを

$$
\begin{cases}
X_1\cdot e_i = -\lambda_i e_{d-i}, & 0\le i\le d'-1\\
X_1\cdot e_{d-i} = \lambda_i e_i, & 0\le i\le d'-1\\
X_1\cdot e_{d'} = 0
\end{cases}
$$

であるように取り替える．

$$
\begin{cases}
u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_i + ie_{d-i}\right) & 0\le i\le d'-1\\
u_{d-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_i - ie_{d-i}\right) & 0\le i\le d'-1\\
u_{d'} = e_{d'}
\end{cases}
$$

および

$$H = -iX_1,\ X = \frac{1}{2}\left(X_3 + iX_2\right),\ Y = \frac{1}{2}\left(-X_3 + iX_2\right)$$

とおくとき

$$H\cdot u_i = \lambda_i u_i, \quad H\cdot u_{d-i} = -\lambda_i u_{d-i}, \quad 0\le i\le d'-1$$

となるから，命題 1 により

$$X\cdot u_i = c_i u_{i-1}, \quad Y\cdot u_i = \overline{c_i}u_{i+1}, \quad 0\le i\le d$$

となる．ただし，$u_{-1}=u_{d+1}=0$ とおいた．

u_i を，H のウェイト λ_i に対するウェイトベクトルとするとき，$I_{p,q}\circ X = -X\circ I_{p,1}$ から

$u_i\in\mathbf{C}^p \Rightarrow X\cdot u_i\in\mathbf{C}^q$

$u_i\in\mathbf{C}^q \Rightarrow X\cdot u_i\in\mathbf{C}^p$

である．

$h \in S(O(p)\times O(q))$ を, $\mathbf{R}e_i + \mathbf{R}e_{d-i}$ への制限が原点のまわりの角 θ_i の回転であり，$\mathbf{R}e_{d'}$ への制限が恒等写像であるものとする．θ_i を適当にとって, X，Y のかわりに $g\cdot X$ および $g\cdot Y$ を考えれば

$$c_i = -c_{d-i+1} \qquad 1 \le i \le d'$$

とすることができる．

定理 7 X_1, X_2, X_2 を

$$\theta(X_1) = X_1, \theta(X_i) = -X_i \ (i=1,2), \qquad [X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}$$

を満たす $\mathfrak{so}(p+q)$ の元とし，リー部分環 $\mathfrak{g}_{=}\mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}X_3$ の $\mathbf{R}^{p+q}$ への作用は既約であるとする．このとき

- $|p-q| = 1$
- $\mathbf{R}^{p+q}$ の

$$e_0,\ e_d,\ e_2,\ e_{d-2}, \dots \in \mathbf{R}^p, \quad e_1,\ e_{d-1},\ e_3,\ e_{d-3}, \dots \in \mathbf{R}^q$$

  である正規直交基底 e_0, $\cdots$, $e_{d'}$ で X_1, X_2, X_3 が次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases} X_2 \cdot e_i = c_i e_{d-i+1} + c_{i+1} e_{d-i+1} & 0 \le i \le d'-2 \\ X_2 \cdot e_{d'-1} = c_i e_{d-i+1} & i = d'-1 \\ X_2 \cdot e_{d-i} = -c_i e_{i-1} - c_{i+1} e_{i+1} & 0 \le i \le d'-2 \\ X_2 \cdot e_{d-i} = -c_i e_{i-1} - c_{i+1}\sqrt{2} e_{d'} & i = d'-1 \\ X_2 \cdot e_{d'} = \sqrt{2} c_{d'} e_{d'+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 \cdot e_i = c_i e_{i-1} - c_{i+1} e_{i+1} & 0 \le i \le d'-2 \\ X_3 \cdot e_i = c_i e_{i-1} - \sqrt{2} c_{i+1} e_{d'} & i = d'-1 \\ X_3 \cdot e_{d-i} = c_i e_{d-i+1} - c_{i+1} e_{d-i+1} & 0 \le i \le d'-2 \\ X_3 \cdot e_{d-i} = c_i e_{d-i+1} & i = d'-1 \\ X_3 \cdot e_{d'} = \sqrt{2} c_{d'} e_{d'-1} \end{cases}$$

例 8 ($SO(5)/S(O(3)\times O(2))$ の Lie triple system)

$$X_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X_3 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ \hline -2 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6 $G_2/SO(4)$

例外型では， $G_2/SO(4)$ について次のことは容易にわかる．

命題 9 $G_2/SO(4)$ には正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体が少なくとも 4 種ある。

$$
I \quad \begin{cases} X_1 &= -G_{23} + G_{45} \\ X_2 &= -G_{25} + G_{34} \\ X_3 &= -G_{24} + G_{53} \end{cases}
$$

$$
II \quad \begin{cases} X_1 &= G_{23} + G_{45} - 2G_{76} \\ X_2 &= G_{25} + G_{34} - 2G_{61} \\ X_3 &= G_{24} + G_{53} - 2G_{17} \end{cases}
$$

$$
III \quad \begin{cases} X_1 &= -2G_{12} + 2G_{65} \\ X_2 &= -2G_{27} + 2G_{63} \\ X_3 &= -2G_{53} + 2G_{17} \end{cases}
$$

$$
IV \quad \begin{cases} X_1 &= 4_{32} + 2G_{54} - 6G_{76} \\ X_2 &= \sqrt{6}(G_{37} + G_{26} - 2G_{15}) + \sqrt{10}(G_{42} - G_{35}) \\ X_3 &= \sqrt{6}(G_{63} + G_{27} - 2G_{41}) + \sqrt{10}(G_{25} - G_{34}) \end{cases}
$$

$G_2/SO(4)$ の曲率が 0 でない全測地的曲面は上の４種で尽くされていることが Klein [1] によって示されている．

参考文献

[1] Sebastian Klein, *Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2*, arXiv:0809.1319.