対称空間の全測地的部分多様体の分類問題へのコンピュータ活用 − S. Klein の仕事の紹介 −

平成２１年１１月湯沢研究会　内藤博夫（山口大 理）

参考文献

[1] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of complex quadric, Differ. Geom. Appl. 26(2008), 79-96.

[2] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of the complex and the quaternionic 2-Grassmannians, Trans. Amer. Math. Soc. 361(2009), 4927-4967.

[3] S. Klein, Reconstructing the geometric structure of a Riemannian symmetric space from its Satake diagram, Geom. Dedicata 138(2009), 25-50.

[4] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2, to appear in Osaka J. of Math.

目的　階数 2 の単連結コンパクトリーマン対称空間のすべての（完備）全測地的部分多様体を等長変換による合同を除いて分類する:

(1) $\mathrm{G}_2^+(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{G}_2(\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{G}_2(\mathbb{H}^n)$ (2-Grassmannians) $\longrightarrow$ [1], [2]

(2) $SU(3)/SO(3)$ $\longrightarrow$ [3]

(3) $SO(10)/U(5)$, $E_6/U(1)\cdot\mathrm{Spin}(10)$, $SU(6)/Sp(3)$, E_6/F_4,$G_2/SO(4)$,
$SU(3)$, $Sp(2)$, G_2 (G_2, E_6, F_4: compact, simply connected) $\longrightarrow$ [4]

方法　M をコンパクト型単連結既約リーマン対称空間，G を M の等長変換群の単位元連結成分, o を M の固定点，K を点 o における G の中のイソトロピー部分群（連結）とし，G, K のリー代数をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とする．$\mathfrak{g}$ 上のある $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 不変な内積 $<,>$ をとり，等質空間 G/K に G-不変リーマン計量を導入し，M をリーマン等質空間 G/K と同一視する．$<,>$ は $\mathfrak{g}$ のキリング形式の定数倍．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を $<,>$ による直交分解とし, T_oM を $\mathfrak{m}$ と同一視する．このとき，M の点 o における曲率テンソル R_o は

$$R_o(x, y)z = -[[x, y], z], \qquad x, y, z \in \mathfrak{m}$$

と表され, M の全測地的部分多様体 N の分類問題は局所的に次の問題に帰着する：$o \in N$, $\mathfrak{m}' = T_oN \subset T_oM = \mathfrak{m}$ と置くとき，$[[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'], \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{m}'$. このような性質を満たす $\mathfrak{m}$ の部分空

間 $\mathfrak{m}'$ を $\mathfrak{m}$ の Lie triple system といい，三項積 $[[x,y],z]$ を Lie triple product という．逆に，$\mathfrak{m}$ の Lie triple system $\mathfrak{m}'$ が与えられると，$o \in N, T_oN = \mathfrak{m}'$ となる M の完備全測地的部分多様体 N が一意に定まる．完備全測地的部分多様体 N の合同類は，Lie triple system $\mathfrak{m}'$ の $\mathrm{Ad}(K)$-同値類に対応する．また，N のリーマン計量は, $\mathrm{Ad}(K)$-不変内積 $<,>_{\mathfrak{m}}$ の $\mathfrak{m}'$ への制限によって決まる．

Klein のアイディアは， Lie triple product $[[x,y],z]$, 内積 $< x,y >_{\mathfrak{m}}$ に関する情報を，リーマン対称空間 M に対応する佐竹図形 (Satake diagram) から出発して，Maple の計算機システムを用いて，具体的に計算する計算機代数システムを構築することにある．リーマン対称空間の幾何学はリーマン計量と曲率テンソルによって支配されるから，この計算機代数システムは有益だと考えられる．Klein の論文では，これら２つのテンソル $[[x,y],z]$ 及び $< x,y >_{\mathfrak{m}}$ を fundamental geometric tensors と呼んでいる．計算機代数システムは以下で公開されている．

http://satake.sourceforge.net　　(Maple package Ver. 10)

階数２のコンパクト単連結既約リーマン対称空間 M の全測地的部分多様体の分類問題では，Lie triple systems の各同値類から代表元を見つけ出すときに必要な Lie triple product の具体的計算に計算機代数システムが用いられる．また，N の断面曲率の計算, すなわち, $< [[x,y],y],x >_{\mathfrak{m}}$ の具体的計算にも用いられる．

1　佐竹図形から fundamental geometric tensors の具体的再構築へ ([3])

$\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり，$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の可換部分代数を $\mathfrak{t}$ とする．$\mathfrak{t}$ の双対空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ の元 α に対して，$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}\ ;\ \mathrm{ad}(H)^2X = \alpha(H)^2X\ \ (H \in \mathfrak{t})\}$ とおき，$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{t}^*; \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ とする．全ての $\alpha \in \Delta$ に対して，$\alpha(H_0) \neq 0$ となる H_0 をとり，$\Delta_+ = \{\alpha \in \Delta; \alpha(H_0) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}_+\}$ とおく．このとき，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Δ を $\mathfrak{g}$ の root system，Δ_+ の元を positive root, 上の分解を $\mathfrak{g}$ の root space 分解という．Π $(\subset \Delta_+)$ を simple roots の集合とする．$\sqrt{-1}\mathfrak{t}$ 上の内積を $\mathfrak{g}$ のキリング形式 κ でとり，$\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ 上に自然に内積 $<,>$ を導入する．以下，$\mathfrak{g}$ 上の内積も $-\kappa$ から導入されるものとする． σ を分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に付随する involution とするとき，σ は $\mathfrak{t}$, Δ，root space 分解を保つ．

[1] **佐竹図形**　$\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, $n_{\alpha,\beta} = 2 < \alpha, \beta > / < \beta, \beta >$ とおく．Π の各元 α を ○ $(\sigma(\alpha) \neq \alpha$ のとき) あるいは ● $(\sigma(\alpha) = \alpha$ のとき）で表し，$\alpha, \beta \in \Pi$ に対して $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha}$ 本 $(= 0, 1, 2, 3)$ の線で結ぶ．$\|\alpha\| > \|\beta\|$ のとき，さらに α から β へ向かって矢印をつける．ま

た，○で表される異なる 2 つの α と β が $\sigma(\alpha) \equiv -\beta \bmod$(●の 1 次結合) となるとき，これらの○を両向き矢印の弧で結ぶ．矢印の無い○で表される α は $\sigma(\alpha) = -\alpha$ となる．このようにして作られたものを佐竹図形といい，コンパクト型リーマン対称空間とリーマン計量の違いを除いて一対一に対応している．

例（AIII(n,q); $SU(n)/S(U(q) \times U(n-q))$）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_q & & \alpha_{q-1} & & \alpha_2 & & \alpha_1 & & \beta_1 \\
\circ & - & \circ & \cdots & \circ & - & \circ & - & \bullet \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \vdots \\
\circ & - & \circ & \cdots & \circ & - & \circ & - & \bullet \\
\alpha_{\pi(q)} & & \alpha_{\pi(q-1)} & & \alpha_{\pi(2)} & & \alpha_{\pi(1)} & & \beta_s
\end{array}
$$

[2] Cartan 行列の復元　$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とするとき，正則行列 (n_{α_i,α_j}) を Cartan 行列という．α_i, α_j が k 本の線で結ばれているとする．$k = 0, 1$ ならば，$n_{\alpha_i,\alpha_j} = n_{\alpha_j,\alpha_i} = 0, 1$. $k = 2, 3$ で $\alpha_i > \alpha_j$ ならば，$n_{\alpha_i,\alpha_j} = 1$, $n_{\alpha_j,\alpha_i} = k$ となる．したがって，佐竹図形から Cartan 行列を復元できる．さらに，$n_{\alpha,\beta} = 2 < \alpha, \beta > / < \beta, \beta >$, $\|\beta\|/\|\alpha\| = \sqrt{n_{\beta,\alpha}/n_{\alpha,\beta}}$ より，定数倍を除いて $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$ 上の内積 $<,>$ を復元できる．

[3] root system Δ の復元　$\alpha \in \Delta_+$ を $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$ と書き，$\ell(\alpha) = \sum_i k_i$ とおく．$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta_+; \ell(\alpha) = j\}$ とする．このとき，$\Delta_+ = \sum_j \Delta_j$ で $\Delta_1 = \Pi$. $\alpha \in \Pi$,$\beta \in \Delta$ に対して，β を通る roots の α-系列 $\{\beta + k\alpha; -p \leq k \leq q\}$ をとると，$p - q = 2 < \beta, \alpha > / < \alpha, \alpha >$ となる．これを用いて, Δ_+ の元を求めるアルゴリズム (R) をつくる．$\Delta_1 \ni \beta$ から出発して β をとおる α-系列（$\alpha \in \Pi$, $1 \leq k \leq q$) を求める．(このとき，$p = 0$ に注意) 得られたものを階列 j ごとに各 Δ_j に配分する.(このとき，階列 2 のすべての roots は Δ_2 に配分されていることに注意）次に, $\Delta_2 \ni \beta$ の α-系列をつくる．$\beta - \alpha \in \Delta_1$ ならスキップ．$\beta - \alpha \notin \Delta_1$ ならば，$1 \leq k \leq q$ なる k に対して得られたものを各 Δ_j に配分.(このときも $p = 0$ に注意. また，得られたものが既に配分されているときはスキップ.）この操作を階列 ℓ に従って実行すれば，Δ_+，従って，Δ が復元される．

[4] $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Lie bracket の復元　$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Lie bracket の復元のためには，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の root space 分解に沿う基底 (Chevalley basis) の決定とその基底間の bracket relations (Chevalley constants) の具体的計算のアルゴリズム (C) を構成する必要がある．$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \ (H \in \mathfrak{t})\}$ とおくとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の root space 分解 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$ を得る．

<u>Def.</u>　$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, $(X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha)$ は次の条件を満たす実数の組 $(c_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \Delta}$ が存在するとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Chevalley basis, その実数の組 $(c_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \Delta}$ を Chevalley constants という．

$$
c_{-\alpha,-\beta} = -c_{\alpha,\beta} \qquad \text{and} \qquad [X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} c_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} & \text{if } \alpha + \beta \in \Delta \\ \alpha^{\#} & \text{if } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

ここで $\alpha^{\#} \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ で $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ にキリング形式を通して対応するものとする．

このとき，$V_\alpha(c)=\frac{1}{\sqrt{2}}(cX_\alpha+\bar{c}\bar{X_\alpha})$ とおくとき，$\mathfrak{g}_\alpha=\{V_\alpha(c);\ c\in\mathbb{C}\}$．また，$c_{\alpha,\beta}^2=\frac{q(1+p)}{2}\cdot\|\alpha\|^2$ が成り立つ．また，$\kappa(X_\alpha,X_{-\alpha})=1$ が成り立つ．

<u>**Prop.**</u>　各 positive root $\alpha\in\Delta/\Pi$ に対して，$\alpha=\xi_\alpha+\eta_\alpha$ $(\xi_\alpha,\eta_\alpha\in\Delta_+)$ となる分解の組 (ξ_α,η_α) を与える．このとき，次の条件を満たす Chevalley basis (X_α) と Chevalley constants $(c_{\alpha,\beta})$ が存在し，そのような Chevalley basis をとる限り Chevalley constants は一意的である: (i) $\bar{X_\alpha}=-X_{-\alpha}$ for $\alpha\in\Delta_+$　(ii) $c_{\xi_\alpha,\eta_\alpha}>0$ for $\alpha\in\Delta_+/\Pi$.

この prop. の意味は，各 $\alpha\in\Delta_+/\Pi$ に対して上のような分解の組を 1 つ指定すれば，すべての Chevalley constants を決定する アルゴリズム (C) があることを示している.（$c_{\alpha,\beta}^2$ は Cartan 行列から分かるので，$c_{\alpha,\beta}$ は一般に ±1 の違いしかないことに注意.）アルゴリズム (C) は Jacobi の恒等式から得られる Chevalley constants 間の関係式

(a) $\alpha+\beta+\gamma=0\ \Rightarrow\ c_{\alpha,\beta}=c_{\beta,\gamma}=c_{\gamma,\alpha}$

(b) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\ \Rightarrow\ c_{\alpha,\beta}c_{\gamma,\delta}+c_{\beta,\gamma}c_{\alpha,\delta}+c_{\gamma,\alpha}c_{\beta,\delta}=0$

を用いて，階列 ℓ に関する帰納法によって構成される．

[5] σ の Δ への作用の復元　佐竹図形の作り方より，Π の両側矢印で結ばれている○表示の α_i, $\alpha_{\pi(i)}$ に対して，$\sigma(\alpha_i)=-\alpha_{\pi(i)}+[\sum_j n_{ij}\beta_j]$ ([ ] 部分は●表示の 1 次結合）における [ ] 部分が復元できればよい．係数 n_{ij} は simple roots 間の内積と Cartan 行列の逆行列を用いて具体的に求めることができる．従って，Δ への σ の作用を復元できる．

[6] σ の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の root space 分解への作用の復元　[4] で復元された Chevalley basis (X_α) と Chevalley constants $(c_{\alpha,\beta})$ に対して，$\sigma(X_\alpha)=s_\alpha X_{\sigma(\alpha)}$ $(s_\alpha\in\mathbb{C})$ とおくとき，constants (s_α) を復元するアルゴリズム (S) を構成する．

<u>**Prop.**</u>　σ を同値な $\mathfrak{g}$ の invoution $\tilde{\sigma}$　$(\tilde{\sigma}=\exp(\mathrm{ad}(H))\circ\sigma\circ\exp(\mathrm{ad}(-H))$, ${}^\exists H\in\mathfrak{t})$ にとりかえれば，constants (s_α) は次のようにとることができる：$\Pi=\{\alpha_k\}$ とおけば

(i) M が AIII$(n,q)=SU(n)/S(U(q)\times U(n-q))$, $2q<n-1$; DIII$(n)=SO(2n)/U(n)$, n : *odd*; EIII$=E_6/(U(1)\cdot SO(10))$ のどれかのとき，

$$s_{\pi(1)}=\frac{c_{\beta,\alpha_1}}{c_{\alpha_{\pi(1)},\beta}}\qquad s_{\alpha_k}=1\ \text{for}\ k\neq\pi(1)$$

但し，α_1, $\alpha_{\pi(1)}$, β は下の例のとおりとする．

(ii) M が (i) 以外のとき，すべての k に対して $s_{\alpha_k}=1$.

また，これらの場合において，すべての $\alpha\in\Delta$ に対して $s_\alpha=\pm1$ が成り立つ．

<u>例</u>　AIII(n,q)

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_q & & \alpha_{q-1} & & \alpha_2 & & \alpha_1 & & \beta_1 \\ \circ & - & \circ & \cdots & \circ & - & \circ & - & \bullet \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \vdots \\ \circ & - & \circ & \cdots & \circ & - & \circ & - & \bullet \\ \alpha_{\pi(q)} & & \alpha_{\pi(q-1)} & & \alpha_{\pi(2)} & & \alpha_{\pi(1)} & & \beta_s \end{array}\qquad \beta=\beta_1+\cdots+\beta_s$$

例　DIII(n)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & & & \alpha_1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & & \beta & \nearrow & \\
\bullet & - & \circ & - & \bullet & - & \circ & \cdots & \circ & - & & & \bullet & & \updownarrow \\
 & & & & & & & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & & & & \alpha_{\pi(1)}
\end{array}
$$

例　EIII

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{c}{\longleftrightarrow} \\
\alpha_1 & & \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & \alpha_{\pi(1)} \\
\circ & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \circ \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & \circ\ \ \alpha_2 & & & &
\end{array}
\qquad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3
$$

上のようにとりかえられた σ に対して，constants $(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ を求めるアルゴリズム (S) を構成する：アルゴリズムは，[4] で構成された Chevalley constants $(c_{\alpha,\beta})$ を読み込んで，σ が自己同型 ($\sigma[X_\alpha, X_\beta] = [\sigma(X_\alpha), \sigma(X_\beta)]$) であることより得られる関係式

$$s_\alpha s_{-\alpha} = 1, \qquad s_{\alpha+\beta} = \frac{c_{\sigma(\alpha),\sigma(\beta)}}{c_{\alpha,\beta}} s_\alpha s_\beta$$

を用いて，$(s_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ を初期データとして階列 ℓ に関する帰納法で $(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$, さらに，$(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ の順で求める．従って，σ の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ への作用が復元される．

[7] $\mathfrak{g}$ の root space 分解及びそれに沿う Lie bracket, 内積の復元　$\alpha \in \Delta$, $z \in \mathbb{C}$ に対して, $V_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(zX_\alpha - \bar{z}X_{-\alpha})$ とおく．このとき次が成り立つ．

Prop.　$\alpha \in \Delta$ に対して, $\mathfrak{g}_\alpha = \{V_\alpha(z); z \in \mathbb{C}\}$. さらに

$[H, V_\alpha(z)] = V_\alpha(\alpha(H)z)$ $(H \in \mathfrak{t}, z, z' \in \mathbb{C})$,

$$[V_\alpha(z), V_\beta(z')] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{\alpha,\beta}V_{\alpha+\beta}(zz') - c_{\alpha,-\beta}V_{\alpha-\beta}(z\bar{z'}) & \text{for } \beta \neq \pm\alpha \\ \mathrm{Im}(\bar{z}z')\sqrt{-1}\alpha^\# & \text{for } \beta = \alpha \\ \mathrm{Im}(zz')\sqrt{-1}\alpha^\# & \text{for } \beta = -\alpha, \end{cases}$$

$< V_\alpha(z), V_\alpha(z') >= \mathrm{Re}(z\bar{z'})$　　$\sigma(V_\alpha(z)) = s_\alpha V_{\sigma(\alpha)}(z)$.

これによって，$\mathfrak{g}$ 上の Lie bracket 及び内積が具体的に計算できる．

[8] 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ とこの分解に沿う Lie bracket と内積の復元（fundamental geometric tensors の具体的計算公式）　$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$, さらに，$\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{k}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}) \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}) \cap \mathfrak{m}$ とおく．このとき，Δ_+ のある部分集合 Δ_+^σ をとれば

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{b} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+^\sigma} \mathfrak{k}_\alpha \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+^\sigma} \mathfrak{m}_\alpha$$

と分解できる．$\alpha \in \Delta$ に対して，$K_\alpha(z)$, $M_\alpha(z)$, $\tilde{K}_\alpha(t)$, $\tilde{M}_\alpha(t)$ を以下の場合に分けて定義する：

(i) $\sigma(\alpha) \neq \pm\alpha$ の場合

$$K_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\alpha(z) + s_\alpha V_{\sigma(\alpha)}(z)) \quad M_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\alpha(z) - s_\alpha V_{\sigma(\alpha)}(z)).$$

このとき $\mathfrak{k}_\alpha = \{K_\alpha(z); z \in \mathbb{C}\}$, $\mathfrak{m}_\alpha = \{M_\alpha(z); z \in \mathbb{C}\}$.

(ii) $\sigma(\alpha) = \alpha$ の場合

このとき $\mathfrak{k}_\alpha = \{V_\alpha(z); z \in \mathbb{C}\}$, $\mathfrak{m}_\alpha = \{0\}$.

(iii) $\sigma(\alpha) = -\alpha$ の場合

$$\tilde{K}_\alpha(t) = \begin{cases} V_\alpha(\sqrt{-1}t) & \text{for } s_\alpha = 1 \\ V_\alpha(t) & \text{for } s_\alpha = -1 \end{cases} \quad \tilde{M}_\alpha(t) = \begin{cases} V_\alpha(t) & \text{for } s_\alpha = 1 \\ V_\alpha(\sqrt{-1}t) & \text{for } s_\alpha = -1 \end{cases}.$$

このとき $\mathfrak{k}_\alpha = \{\tilde{K}_\alpha(t); t \in \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{m}_\alpha = \{\tilde{M}_\alpha(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Prop. (a) 内積に関して次の計算公式が成り立つ：

$< K_\alpha(z), K_\alpha(z') >=< M_\alpha(z), M_\alpha(z') >=< V_\alpha(z), V_\alpha(z') >=\mathrm{Re}(z\bar{z'})$,

$< \tilde{K}_\alpha(t), \tilde{K}_\alpha(t') >=< \tilde{M}_\alpha(t), \tilde{M}_\alpha(t') >= tt'$.

(b) σ, $-$ 作用に関して次の計算公式が成り立つ：

$K_{\sigma(\alpha)}(z) = s_\alpha K_\alpha(z)$, $M_{\sigma(\alpha)}(z) = -s_\alpha M_\alpha(z)$,

$K_{-\alpha}(z) = -K_\alpha(\bar{z})$, $M_{-\alpha}(z) = -M_\alpha(\bar{z})$.

(c) すべての Lie bracket を計算する公式がある（詳細は [3]）：

$[K_\alpha(z), K_\beta(z')]$, $[K_\alpha(z), M_\beta(z')]$, $[M_\alpha(z), M_\beta(z')]$, $[V_\alpha(z), K_\beta(z')]$,

$[V_\alpha(z), M_\beta(z')]$, $[K_\alpha(z), K_\beta(z')]$, $[\tilde{K}_\alpha(t), K_\beta(z)]$, $[\tilde{K}_\alpha(t), \tilde{K}_\beta(s)]$, e.t.c.

2 階数２のコンパクト単連結リーマン対称空間の全測地的部分多様体の分類問題への応用 ([1],[2],[3],[4])

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して，$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{m}; \mathrm{ad}(Z)^2 X = -\lambda(Z)^2 X \ (Z \in \mathfrak{a})\}$ とおき，$\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*/\{0\}; \mathfrak{m}_\lambda \neq \{0\}\ \}$ とする．$\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}$ に関する restricted root system といい，§.1 の $\Delta_+^\sigma \ni \alpha \to \lambda = \alpha|_\mathfrak{a} \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ は全射で，$m_\lambda = \sum_{\alpha:\alpha|_\mathfrak{a}=\lambda} m_\alpha$ である．restricted root sistem $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ は σ の $\mathfrak{g}$ の root system Δ への作用が分かっているので復元できる．$\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ の１つの system of positive roots を Δ_+ とおく．以下，Δ_+, $\mathfrak{m}_\lambda$ は restricted root system に対応する記号とし，$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Delta_+} \mathfrak{m}_\lambda$ を restricted root system に関する root space 分解とする．また，$\dim \mathfrak{m}_\lambda = n_\lambda$ とおき，root λ の multiplicity という．

$\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$ を Lie triple system，$\mathfrak{a}'$ を $\mathfrak{m}'$ の 極大可換部分代数，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}'$ を含む $\mathfrak{m}$ の極大可換部分代数として取り直す．$\mathfrak{m}' = \mathfrak{a}' \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}')} \mathfrak{m}'_\alpha$ を $\mathfrak{m}'$ の $\mathfrak{a}'$ に関する root space 分解とする．ここで，$\Delta(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}') \subset \{\lambda|_{\mathfrak{a}'}; \lambda \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}),\ \lambda|_{\mathfrak{a}'} \neq 0\}$, $\mathfrak{m}'_\alpha = \left(\sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{m},\mathfrak{a}):\lambda|_{\mathfrak{a}'}=\alpha} \mathfrak{m}_\lambda\right) \cap \mathfrak{m}'$ となる．とくに，$\lambda|_{\mathfrak{a}'} = 0 \ \Rightarrow\ \mathfrak{m}_\lambda \perp \mathfrak{m}'$．また，$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \Rightarrow \Delta(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}') \subset \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{m}'_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{m}'$.

以下，rank $\mathfrak{m} = 2$ と仮定する．restricted root system $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ の type は A_2, B_2, BC_2, G_2 のどれかになる．

Prop. (a) $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}')$ が $\lambda|_{\mathfrak{a}'} = \alpha$ となる $\lambda \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ を唯1つ持つならば，$\lambda^{\#} \in \mathfrak{a}'$. (このような α を elementary root という.）この場合，$\mathfrak{m}'_\alpha \subset \mathfrak{m}_\lambda$.

(b) $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}')$ が $\lambda|_{\mathfrak{a}'} = \mu|_{\mathfrak{a}'} = \alpha$ となる2つの $\lambda, \mu \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ を持つならば，$(\lambda^{\#} - \mu^{\#}) \perp \mathfrak{a}'$. (このような α を composite root という.）この場合，$\alpha^{\#} = a\lambda^{\#} + b\mu^{\#}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ と表すとき，$a > 0$, $b > 0$ で, さらに，$\mathfrak{m}_\lambda$ の部分空間 $\mathfrak{m}'_\lambda$ と linear isometry $\Phi : \mathfrak{m}'_\lambda \to \mathfrak{m}_\mu$ を用いて，$\mathfrak{m}'_\alpha$ を $\mathfrak{m}'_\alpha = \{x + \sqrt{b/a}\,\Phi(x); x \in \mathfrak{m}'_\lambda\}$ と表すことができる．とくに，$n'_\alpha \leq n_\lambda, n_\mu$.

(c) $\Delta' \subset \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ が closed root subsystem ならば，$\mathfrak{m}' = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\lambda^{\#}; \lambda \in \Delta'\} \oplus \sum_{\lambda \in \Delta'_+} \mathfrak{m}_\lambda$ は $\mathfrak{m}$ の Lie triple system.（これを Δ' に付随する Lie triple system という.）

次に，$\mathfrak{a}$ の Weyl chamber $\mathfrak{c}$ をとり，その壁を R_1, R_2 (R_1 が shorter root に対応）とする．$v \in \mathfrak{m}' - \{0\}$ に対して，isotropy action によって，v を $\mathfrak{c}$ の元に移し，R_1 からこの元までの角度を $\varphi(v)$ とおく．rank $\mathfrak{m}' = 1$ よりこの値は $\mathfrak{m}'$ によって決まる．これを $\mathfrak{m}'$ の isotropy angle といい，$\varphi(\mathfrak{m}' - \{0\}) = t$ で表す．ristricted root system の型から t の動く範囲を $[0, \varphi\mathrm{max}]$ とおくとき，A_2, B_2, BC_2, G_2 に従って，$\varphi\mathrm{max} = \pi/3, \pi/4, \pi/4, \pi/6$.

M の全測地的部分多様体の分類方針

(a) $\mathfrak{m}$ の Lie triple system $\mathfrak{m}'$ の具体的決定：rank $\mathfrak{m} = 2$ だから，rank $\mathfrak{m}' = 1$ と rank $\mathfrak{m}' = 2$ の場合に分ける.

(a-1) <u>rank $\mathfrak{m}' = 1$ の場合</u>: Prop. の (a),(b) の前半によって，$\mathfrak{a}$ における $\mathfrak{a}'$ の可能な位置が決まり，その位置を isotropy angle によってパラメータ表示することができる.（パラメータの値 t を分類できる）さらに (a), (b) の後半によって，$\mathfrak{m}'_\alpha$ の 大雑把な $\mathfrak{m}$ への入り方が分かる．$\mathfrak{a}'$ の可能な位置が決まれば，それから $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ の $\mathfrak{a}'$ への制限が具体的に求まり, $\Delta'(\mathfrak{m}', \mathfrak{a}')$ $(\subset \{\lambda|_{\mathfrak{a}'} : \lambda \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})\})$ の可能性をリストアップできる．rank $\mathfrak{m}' = 1$ だから, root spaces $\mathfrak{m}'_\alpha$ の multiplicity n'_α がわかるので，より詳細な可能性に絞ることができる. $\mathfrak{m}'$ の $\mathfrak{m}$ への大雑把な入り方が分かるので，その入り方が Lie triple system の条件を満たしているかどうかを調べる．このとき，Lie triple product のコンピュータ計算を使う．Case by Case の詳細な議論が必要であるが，root spaces を使った具体的な Lie triple system の形を分類することができる．得られた形が具体的なので，これらの同型関係もチェックできる.

(a-2) <u>rank $\mathfrak{m}' = 2$ の場合</u>: Prop. (c) によって， その restricted root system の可能性をリストアップすることができる．さらには，root spaces $\mathfrak{m}'_\alpha$ の $\mathfrak{m}_\alpha$ への大雑把な入り方が分かる．rank 2 の restricted root system の multiplicity が知られている（例えば，Araki の分類）ので，それを使いながら $\mathfrak{m}'$ の $\mathfrak{m}$ への大雑把な入り方が分かる. (a-1) と同様に，この入り方が Lie triple system の条件を満たすかどうか調べて，このタイプの全ての Lie triple system $\mathfrak{m}'$ を具体的な形で分類する. 分類プロセスの詳細は case by case である.

(b) M の完備全測地的部分多様体の分類：(a) の Lie triple system $\mathfrak{m}'$ の分類は, $\mathfrak{m}$ への入り方もこめて，具体的な形で分類されているので, $\mathfrak{m}'$ の “maximality ”の決定や断面曲率の計算も具体的にできる．また，$\mathfrak{m}'$ に対応する M の global な全測地的部分多様体の構成も予想ができる．Klein の論文には対応する全測地的部分多様体の具体的な isometric imbedding

が与えられている．

<u>注意</u>　(1) この分類方針は exceptional type のときには有益．また，M が group type のときは，$\mathfrak{g}$ の root system から出発できるので，コンピュータ計算はより簡便になる．

(2) 2-Grassmannians と $SU(3)/SO(3)$ の場合の $\mathfrak{m}'$ の分類は個別に行われた ([1],[2],[3]) が，他の場合の分類には, 上記の分類結果と，つぎの自然な inclusions が利用される．大雑把な分類プロセスは次のとおり：$E_6/(U(1){\cdot}\mathrm{Spin}(10))$ の inclusion $Sp(2)/\mathbb{Z} \subset SO(10)/U(5) \subset E_6/(U(1){\cdot}\mathrm{Spin}(10))$ を利用する．先ず, $E_6/(U(1){\cdot}\mathrm{Spin}(10))$ の場合の $\mathfrak{m}'$ を分類し，その中から $Sp(2)/\mathbb{Z}$, $SO(10)/U(5)$ に含まれる $\mathfrak{m}'$ を見つける．このとき，$Sp(2)$ と $SO(10)/U(5)$ における同型関係に注意する．同様に，$SU(3)/SO(3) \subset SU(3) \subset SU(6)/Sp(3)$, $(SU(6)/Sp(3))/\mathbb{Z}_3 \subset E_6/F_4$ を使えば，E_6/F_4 の場合を考えればよい．また，$G_2/SO(4) \subset G_2$ を使えば，G_2 の場合を考えればよい．

$SU(3)/SO(3)$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ は same rank, i.e., $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$．従って，$\mathfrak{g}$ の root system は $\mathfrak{m}$ の restricted root system, i.e., $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ で A_2 型．$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\}$, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ とおくと，佐竹図形及び $\mathfrak{m}$ の root space 分解は

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & & \alpha_2 \\ \circ & - & \circ \end{array} \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{m}_{\alpha_k},\ \mathfrak{m}_{\alpha_k} = \mathbb{R}\tilde{M}_{\alpha_k}(1)$$

$H_k = -\sqrt{-1}\alpha_k^{\#} \in \mathfrak{a}$ とおく．このとき，$\mathfrak{m}$ の Lie triple system $\mathfrak{m}' \neq \{0\}, \mathfrak{m}$ は以下のとおり．

<u>**Prop.**</u>

(G) $\mathfrak{m}' = \mathbb{R}H$, $H \in \mathfrak{a}$

(T) $\mathfrak{m}' = \mathfrak{a}$

(S) $\mathfrak{m}' = \mathbb{R}H_3 \oplus \mathbb{R}\tilde{M}_{\alpha_3}(1)$

(M) $\mathfrak{m}' = \mathbb{R}H_3 \oplus \mathbb{R}(\tilde{M}_{\alpha_1}(1) + \tilde{M}_{\alpha_2}(1))$

(P) $\mathfrak{m}' = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}\tilde{M}_{\alpha_3}(1)$

ここで，inclusions (G) $\subset$ (T) $\subset$ (P) と (S) $\subset$ (P) の 2 系列があり，さらに (P) と (M) は maximal．また，各 Lie triple system に対応する $SU(3)/SO(3)$ の全測地的部分多様体の isometry type は次のとおり．ただし，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $<,>$ は，$<A, B>=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(B^*A))$, $A, B \in \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ でとるとする．

$\mathfrak{m}'$	isometry type
(G)	$\mathbb{R}$ or S^1_r
(T)	$(S^1_{r=\sqrt{3/2}} \times S^1_{r=\sqrt{1/2}})/\{\pm id\}$
(S)	$S^2_{r=\sqrt{1/2}}$
(M)	$\mathbb{R}P^2_{\kappa=1/2}$
(P)	$(S^1_{r=\sqrt{3/2}} \times S^2_{r=\sqrt{1/2}})/\{\pm id\}$

ここで r は半径，κ は曲率とする．