

# 3次元 Euclid 空間における平坦な Möbius の帯と特異点

直川耕祐 (大阪大学 理学研究科 博士前期課程 2年)

3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  における平坦 (つまり Gauss 曲率が常に 0) な Möbius の帯は, 古くから知られていた研究対象にも関わらず, その研究は 20 世紀後半に至るまで, あまり為されてこなかった. 1962 年, Wunderlich[6] により, 中心線が測地線となっているような平坦な Möbius の帯の存在が示された. 平坦な曲面は「紙」を曲げたり, いくつか継ぎ合わせたりして作ることができるが, Wunderlich の例の存在は, 長方形の帯状の「紙」から Möbius の帯が作れるということ, 数学的に示したことを意味する. その後, 1984 年, Chicone-Kalton[1]<sup>\*1</sup>により, 中心線が曲率線となっている例の存在が示され, また, 与えられた空間閉曲線を中心線とする平坦な Möbius の帯の存在・非存在について, 詳しく調べられた. さらに, Røgen[5] により, 任意に与えられた isotopy 型と同じ結び目を中心線とするような, 平坦な Möbius の帯の存在が示された. この主張は, 中心線が測地線または曲率線であるという付加条件を課しても成り立つことが, 黒野-梅原 [2] によって示された. ここでは, 「Möbius の帯」は次のように定義される曲面である.

**定義 1.**  $\epsilon > 0$  を十分小さくとる.  $\gamma(s)$  を  $\mathbb{R}$  上の周期  $L$  の  $C^\infty$ -正則空間閉曲線,  $\xi(s)$  を各点で  $\gamma'(s)$  と一次独立な  $\gamma$  に沿う  $C^\infty$ -単位ベクトル場で,  $\xi(s+L) = -\xi(s)$  を満たすとする. ただし  $'$  は  $s$  に関する微分である.  $\mathbb{R}^3$  への  $C^\infty$ -はめ込み

$$F(s, u) := \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

を中心線  $\gamma$ , 生成方向  $\xi$  の  $C^\infty$  級の Möbius の帯という.

$\mathbb{R}^3$  における平坦な Möbius の帯の生成方向を延長し, その上に現れる特異点について述べる.  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  から  $\mathbb{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像  $f$  のはめ込みでない点を  $f$  の特異点という. Hartman-Nirenberg の定理により, 次が成り立つ.

**事実 2.** 完備かつ平坦な  $\mathbb{R}^3$  にはめ込まれた曲面は柱面である.

このことから,  $\mathbb{R}^3$  における平坦な Möbius の帯の生成方向を延長すると, 必ず特異点が現れることが分かる. そこで, 平坦な Möbius の帯の延長上の特異点に注目しよう. 「特異点の種類」を見るために, 次のような同値関係を定義する.

**定義 3.**  $p_i \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2$ ) のまわりの開集合  $U_i$  から  $\mathbb{R}^3$  への 2 つの  $C^\infty$ -写像  $f_i(u, v)$  ( $i = 1, 2$ ) に対し,  $\varphi(p_1) = p_2$  を満たす  $p_1$  の近傍から  $p_2$  の近傍へのある微分同相写像  $\varphi$  と  $\Phi(f_1(p_1)) = f_2(p_2)$  を満たす  $\mathbb{R}^3$  における  $f_1(p_1)$  の近傍から  $f_2(p_2)$  の近傍へのある微分同相写像  $\Phi$  が存在し,  $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$  となるとき, 写像芽  $f_1$  は写像芽  $f_2$  に右左同値であるという.

特異点には次のような例がある. 3/2-カスプと  $\mathbb{R}$  の直積を表す写像  $f_C(u, v) := (2u^3, -3u^2, v)$

---

<sup>\*1</sup> 1984 年にプレプリントとして発表された. その後, 様々な論文で引用されるようになり, 2002 年に論文として掲載された.

は原点において特異点をもつが，これと原点において右左同値な写像芽をカスプ辺という (図 1) .  
 また，写像  $f_S(u, v) := (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$  も原点において特異点をもつが，これと原点  
 において右左同値な写像芽を燕の尾という (図 2) . ただし，与えられた写像芽に対して，その特

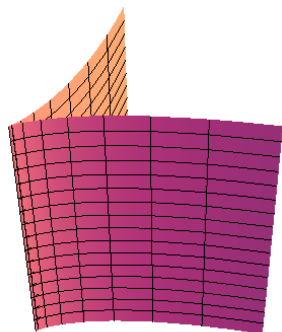


図 1 カスプ辺

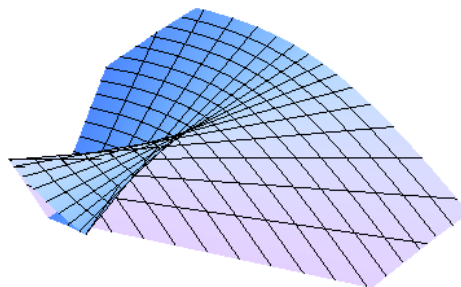


図 2 燕の尾

異点の種類を右左同値の定義に従って直接判定することは，一般的に困難である．これには，國分-Rossmann-佐治-梅原-山田 [3] によって得られた便利な判定法がある．カスプ辺，燕の尾などの特異点を，容易に判定することができる．詳しくは，論文 [3] を参照せよ．平坦な曲面に現れる特異点は，ほとんどの場合はカスプ辺であり，その次によく現れる特異点は，燕の尾であることが知られている．そこで，カスプ辺以外の特異点に注目し，その特異点がどの程度現れるのか，その個数の下限を調べる．関連する事実を紹介するために，「波面」と呼ばれる特異点を許す曲面を定義する．

定義 4.  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  から  $\mathbb{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像  $f$  が波面であるとは，ある  $C^\infty$ -写像  $\nu: U \rightarrow \mathbb{S}^2$  が存在し， $\nu$  は  $f$  の特異点集合を除く各点で単位法線ベクトルを与え，かつ， $C^\infty$ -写像  $(f, \nu): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$  がはめ込みとなるときにいう．また，2次元多様体  $M^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像  $f$  が波面であるとは，任意の  $p \in M^2$  に対して， $p$  のまわりのある座標近傍  $(U; u, v)$  が存在して， $U$  への  $f$  の制限  $f|_U$  が波面となるときにいう．

波面の大域的な性質を調べるため， $\mathbb{R}^3$  にはめ込まれた曲面における完備に対応して，波面における「完備」が次のように定義される．

定義 5.  $M^2$  を 2次元多様体とし， $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を波面とする． $f$  が完備であるとは，その特異点集合  $S(f)$  がコンパクトであり，かつ， $M^2$  上で定義された Riemann 計量  $g$  と  $S(f)$  を含む有界閉集合  $K$  が存在し， $M^2 \setminus K$  上で  $g$  と  $f$  の第一基本形式が一致するときにいう．

次のような事実が知られている．

事実 6. (村田-梅原 [4])  $\mathbb{R}^3$  における，十分遠方で自己交叉をもたない完備な平坦波面は，特異点をもてばカスプ辺以外の特異点を少なくとも 4 つもつ．

筆者は、このようなカスプ辺以外の特異点の個数に関する考察を、平坦な Möbius の帯の延長に  
 対して行い、次のような結果を得た。

定理 7.  $\mathbb{R}^3$  における  $C^\infty$  級の平坦な Möbius の帯の生成方向への拡張  $\tilde{F}(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ ,  
 ( $u \in \mathbb{R}$ ) には、カスプ辺以外の特異点が少なくとも 1 つ存在する。

また、この評価が最良である例が存在することも数学的に証明できた (図 3)。図 4 はこの例の生  
 成方向を延長したものである。図 5, 図 6 は、特異点集合の  $\mathbb{R}^3$  への像である。この例の中心線は、  
 円柱面上の曲線である。ただし、自己交叉をもつ。しかし、この中心線を少し摂動させることによ  
 り、中心線が埋め込みとなっているような例も作ることができる。

筆者は、現在、中心線が測地線となっているという条件を付加した場合において、カスプ辺以外  
 の特異点の個数の下限を調べているところである。今のところ、カスプ辺以外の特異点が 3 つで  
 ある例が見つまっている。これが下限であるかどうかを考察しているところである。

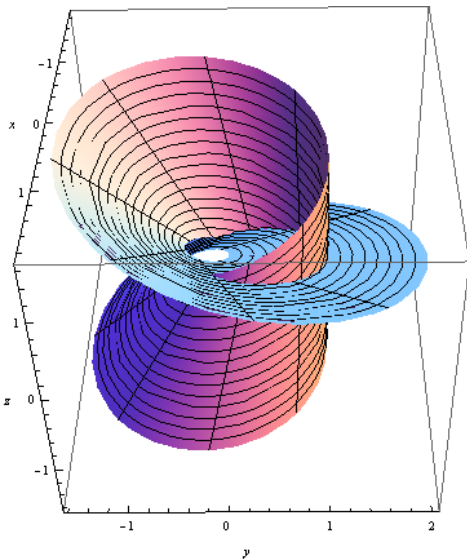


図 3 カスプ辺以外の特異点が 1 つの例

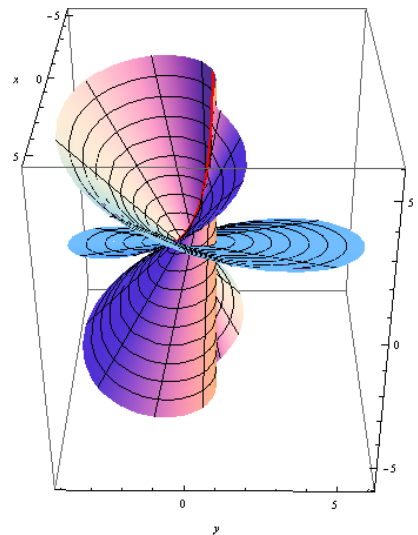


図 4 生成方向を延長したもの

## 参考文献

- [1] C. Chicone, N. J. Kalton, *Flat Embeddings of the Möbius strip in  $\mathbb{R}^3$* , Commun. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 31–50. (preprint は 1984 年である)
- [2] Y. Kurono, M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in  $R^3$  whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.
- [3] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

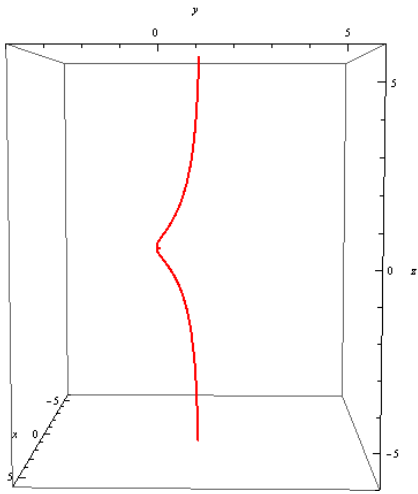


図 5 特異点集合の  $\mathbb{R}^3$  への像

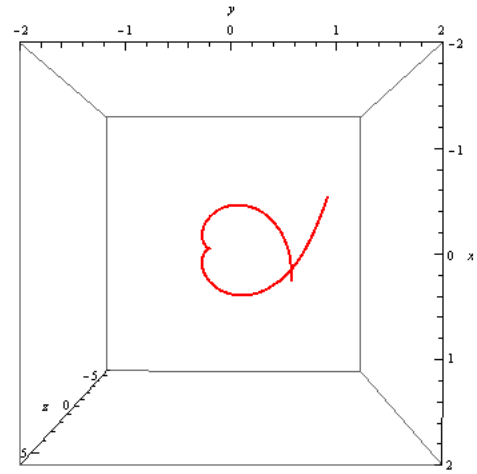


図 6 特異点集合の  $\mathbb{R}^3$  への像 (上から)

- [4] S. Murata, M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Diff. Geom. **82** (2009), 279–316.
- [5] P. Røgen, *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.
- [6] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.