変曲点のない $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の位相型の分類

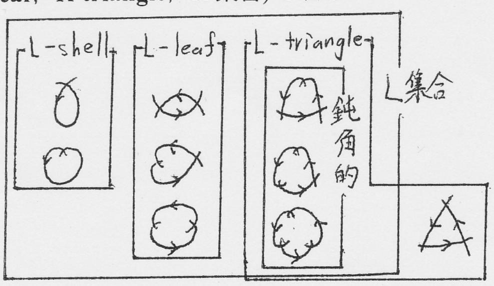
大阪大学大学院理学研究科数学専攻
大野俊太朗

Cairns-Elton[1] は，球面 S^2 上の一般的な正則閉曲線の位相型を分類するアルゴリズムを与えた．そのアルゴリズムによる 5 交点以下の，S^2 上の閉曲線の位相型のリストが小林-梅原 [2] の付録に記載されている．それを元にして今回のショートコミュニケーションでは，5 交点以下の，変曲点をもたない $\mathbb{R}^2$ 上の閉曲線の位相型の分類に関する研究内容を報告した．

閉曲線に関する定義を述べる．S^1 から $\mathbb{R}^2$ への連続写像のことを**閉曲線**と言う．また，曲線 γ が C^∞ 級であり，常に $\dot{\gamma} \neq 0$ が成り立つとき，γ は**正則**であると言う．ただし，「$\cdot$」は $t \in I$ に関する微分を表す．正則な曲線 γ において，$\kappa(t) := \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))/|\dot{\gamma}|^3$ を γ の**曲率**と言い，$\kappa(c) = 0$ を満たすような $c \in I$ を**変曲点**と言う．ここで，正方行列 T に対して $\det T$ は T の行列式を表す．

定義 0.1 正則閉曲線 γ が**一般的**であるとは，γ に自己交叉が存在しても高々有限個で，それらは全て二重点で，その点において γ は横断的に交わることである．また，2 個の一般的な正則閉曲線 γ_1，γ_2 が同じ**位相型**であるとは，その 2 個の曲線の $\mathbb{R}^2$ 上の像が微分同相であることである．

定義 0.2 以下のような正則閉曲線の部分集合を，それぞれ **L-shell**，**L-leaf**，**L-triangle**，**L 集合** (**R-shell**，**R-leaf**，**R-triangle**，**R 集合**) と言う．



矢印が逆になっている
L-shell, L-leaf, L-triangle, L集合をそれぞれ
R-shell, R-leaf, R-triangle, R集合と言う。

Gauss-Bonnet の定理 ([3] 命題 13.4) を用いて，次の命題が示せる．

命題 0.3 L 集合 (R 集合) 上に曲率が正 (負) である点が存在する．

命題 0.3 で示された shell，leaf，triangle の性質を用いて，変曲点のない曲線の分類について考察する．

注意 0.4 1 つの閉曲線の中に，L 集合と R 集合が同時に存在するとき，前者は曲率 κ が正である点を含み，後者は κ が負である点を含む．故に曲率関数の連続性より，その曲線には $\kappa = 0$ となる点，つまり変曲点が存在

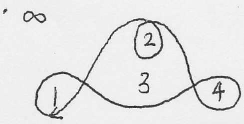
する．従って，変曲点をもたない閉曲線を構成するとき，L 集合と R 集合との混在は許されない．

注意 0.5 立体射影において，$S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ と同一視する．ここで言う立体射影とは，S^2 から $\mathbb{R}^2$ への通常の立体射影と x 軸についての折り返しの合成である．

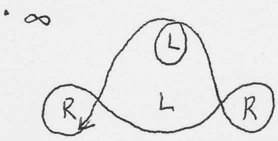
球面 S^2 上の曲線を，立体射影によって $\mathbb{R}^2$ 上へ写すとき，S^2 の無限遠点 ∞ の位置によって，写された $\mathbb{R}^2$ 上の曲線の位相型は異なる．また，S^2 上の曲線において，shell の進行方向の左側 (右側) の領域に無限遠点 ∞ が存在すれば，$\mathbb{R}^2$ 上へ写したときに，その shell は R-shell (L-shell) になる．これは，leaf，triangle についても同様のことが言える．すなわち，S^2 上の曲線において，leaf の進行方向の左側 (右側) の領域に無限遠点 ∞ が存在すれば，$\mathbb{R}^2$ 上へ写したときに，その leaf は R-leaf (L-leaf) になる．また，triangle の進行方向の左側 (右側) の領域に無限遠点 ∞ が存在すれば，$\mathbb{R}^2$ 上へ写したときに，その triangle は R-triangle (L-triangle) になる．

この考察により，S^2 上の正則閉曲線を元に，変曲点のない $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の位相型を構成する．その構成方法を例を挙げて説明する．

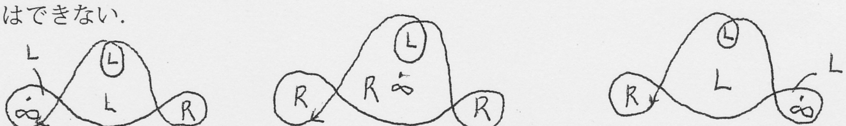
例 0.6 次の S^2 上の曲線について考察する．ここに書かれている数字は，S^2 の無限遠点 ∞ が図の位置にあったときに，曲線に囲まれた有界な領域につけられた番号である．



- 領域 1〜4 に ∞ が存在しないとき，L-triangle，R-shell が同時に存在するので，この曲線を変曲点なしに描くことはできない．



- 領域 1，3，4 の内部に ∞ が存在するとき，L 集合と R 集合が同時に存在するので，この曲線を変曲点なしに描くことはできない．



- 領域 2 の内部に ∞ が存在するとき，L 集合は存在しない．立体射影でこの曲線を $\mathbb{R}^2$ 上に写すと，実際に変曲点なしで曲線を描くことができる．

他の S^2 上の正則閉曲線についても同様の考察を行い，以下の結果を得た．

定理 0.7 5 交点以下の，変曲点をもたない $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の位相型の個数は，以下のようになる．

自己交叉の数	0	1	2	3	4	5
位相型の個数	1	1	2	6	16	50

5 交点以下の，変曲点をもたない $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の位相型の分類表は付録として載せておく．

付録 A　5 交点以下の変曲点のない $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の位相型の分類表

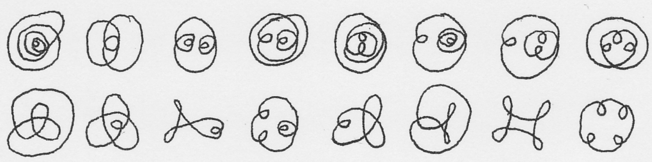
- 交点のない曲線

- 1 交点の曲線

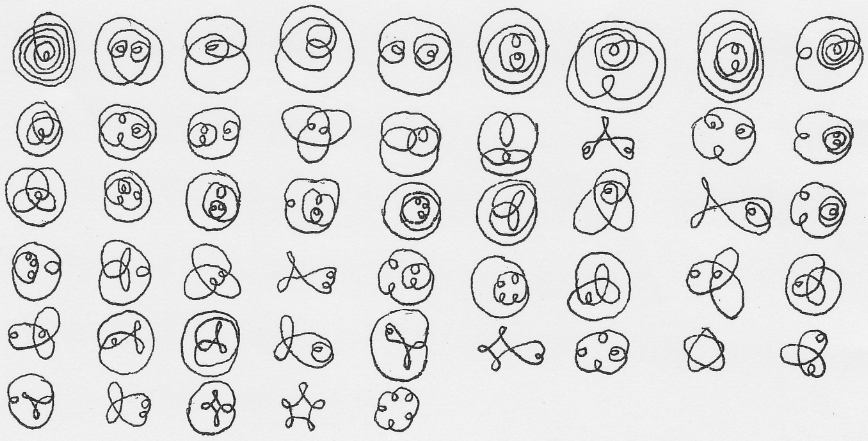
- 2 交点の曲線

- 3 交点の曲線

- 4 交点の曲線



- 5 交点の曲線



参考文献

[1] G.Cairns and D.M.Elton, *The Planarity Problem for Signed Gauss Words*, J. Knot Theory and Its Ramif.**2** (1993), 359-367.

[2] O. Kobayashi and M. Umehara, *Geometry of scrolls*, Osaka J. Math. **33** (1996), 441-473.

[3] 山田光太郎-梅原雅顕著, 曲線と曲面「微分幾何学的アプローチ」, 裳華房 (2002).