純虚ケーリー代数内のリーマン等質超曲面上の 概複素構造の変形について

大橋美佐 (名城大学大学院理工学研究科)

本研究は橋本英哉先生との共同研究である.

1 目的

四元数 $\boldsymbol{H}$ の直和を $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$, $\varepsilon = (0,1)$ とおく. $\boldsymbol{O}$ に次の積構造を導入した代数をケーリー代数とよぶ. $(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$, ここに $a, b, c, d \in \boldsymbol{H}$ を表す. ” $^-$ ” は $\boldsymbol{H}$ の共役を表す. $\boldsymbol{O}$ は非可換で非結合的で交代的な可除代数となる.

$\boldsymbol{O}$ の積を保つ自己同型群として G_2 を

$$G_2 = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)g(v) \quad for\ ^{\forall}u, v \in \boldsymbol{O}\}$$

と定義する. $g(1) = 1$ より $G_2 \subset SO(7)$ であり, G_2 は 14 次元のコンパクトな例外型単純 Lie 群となることが知られている.

可符号 6 次元多様体 M からケーリー代数の純虚数部分

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O} = \{x \in \boldsymbol{O} \mid\ < x, 1 >= 0\} \cong \mathbf{R}^7$$

への 2 つのはめ込みを $\varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$, $\varphi' : N \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ とする. φ と φ' が $SO(7)$-合同であるとは $h \in SO(7)$, $b \in \boldsymbol{R}^7$, $\psi : M \to N$: orientation preserving diffeo, が存在して, $h \circ \varphi + b = \varphi' \circ \psi$ を満たすことである. $SO(7)$ を G_2 に変更した時 G_2-合同とよぶ. G_2-合同ならば $SO(7)$-合同になることに注意する.

本研究の目的はリーマン等質な超曲面 $\varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ に対して次の商空間 (G_2-合同類の為す moduli 空間) を考えることである.

$$\{g \circ \varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O} | g \in SO(7)\}/ \sim_{G_2}$$

2 G_2-合同定理

$\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{O}$ の基底を

$$N = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}\varepsilon),\ E_1 = iN,\ E_2 = jN,\ E_3 = -kN,$$
$$\bar{N} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}\varepsilon),\ \bar{E}_1 = i\bar{N},\ \bar{E}_2 = j\bar{N},\ \bar{E}_3 = -k\bar{N},$$

とおく. このとき $(\varepsilon,\ E,\ \bar{E})$ は $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ の基底となる. ここに $E = (E_1,\ E_2,\ E_3)$, $\bar{E} = (\bar{E}_1,\ \bar{E}_2,\ \bar{E}_3)$ を表す. Lie 群 G_2 の $End_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O})$ への表現 $\rho :\ G_2\ \hookrightarrow End_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O})$ を $^{\forall}u \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ に対して

$$\rho(g)(u) = g(u)$$

と定義する．群作用 $\rho(g)$ を complex linear に拡張し

$$\begin{pmatrix} u & f & \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(g)(\varepsilon) & \rho(g)(E) & \rho(g)(\bar{E}) \end{pmatrix}$$

と定めると，$(u, f, \bar{f})$ は G_2 上の $M_{7\times 7(\boldsymbol{C})}$ に値を持つ C^∞ 級関数となる．

Proposition [Bryant] G_2 の *Maurer Cartan form* は

$$d\begin{pmatrix} u & f & \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & f & \bar{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}{}^t\bar{\theta} & \sqrt{-1}{}^t\theta \\ -2\sqrt{-1}\theta & \kappa & [\bar{\theta}] \\ 2\sqrt{-1}\bar{\theta} & [\theta] & \bar{\kappa} \end{pmatrix}$$

となる．ただし $\theta = {}^t\begin{pmatrix} \theta^1 & \theta^2 & \theta^3 \end{pmatrix}$ は $M_{3\times 1}(\boldsymbol{C})$ に値をもつ *1-form* , κ は $su(3)$ に値をもつ *1-form* を表す．

2 つの超曲面 $(M,\ \varphi)$, $(N,\ \varphi')$ が $SO(7)$-合同ならば

$$g_M = \psi^* g_N,\ \mathrm{II}_\varphi = \psi^* \mathrm{II}_{\varphi'}$$

を満たす．また逆も成立する．

はめ込み $\varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ に対して，単位法ベクトル場 ξ と $\boldsymbol{O}$ の積を用いて M 上の概複素構造 J を ${}^\forall X \in T_pM$ $(p \in M)$ に対して $\varphi_*(J_pX) = \varphi_*(X)\xi$ と定める．

2 つの超曲面 $(M,\ \varphi)$, $(N,\ \varphi')$ が G_2-合同ならば

$$\begin{aligned} &g_M = \psi^* g_N,\ \mathrm{II}_\varphi = \psi^* \mathrm{II}_{\varphi'},\ J_\varphi = {\psi_*}^{-1} \circ J_{\varphi'} \circ \psi_*, \\ &\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \psi^*(\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}) \end{aligned}$$

を満たす．また $\omega^i,\ \omega^{i'}$ $(i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ M 上と N 上の $f_i,\ f_i{}'$ の dual 1-form, $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ と $\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$ はそれぞれ M 上と N 上の complex volume form を表す．

Theorem 1 $(M,\ \varphi)$, $(N,\ \varphi')$ を 2 つの $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ 内の超曲面とする．M から N への *orientation presreving diffeo* ψ が存在して，

$$g_M = \psi^* g_N, \quad J_\varphi = {\psi_*}^{-1} \circ J_{\varphi'} \circ \psi_*, \quad \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \psi^*(\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'})$$

を満たすとき $(M,\ \varphi)$ と $(N,\ \varphi')$ は G_2-合同である．

3 G_2-orbits

6 次元球面 S^6, 5 次元球面 S^5 は等質空間として

$$S^6 \cong G_2/SU(3), \quad S^5 \cong SU(3)/SU(2)$$

と表示することができる．これより，$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ 内の oriented o.n.2-frames の為す Stiefel 多様体 $V_2^+(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O})$ は

$$V_2^+(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}) \cong G_2/SU(2)\ \big(\cong SO(7)/SO(5)\big)$$

$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ 内の oriented 2-palne の為す Grassmann 多様体 $G_2^+(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O})$ は

$$G_2^+(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}) \cong G_2/U(2)\ \Big(\cong SO(7)/SO(2)\times SO(5)\Big)$$

と表示できる. $\mathbf{R}^7$ 内の oriented o.n.3-frames の為す Stiefel 多様体 $V_3^+(\mathbf{R}^7) \cong SO(7)/SO(4)$, $\mathbf{R}^7$ 内の oriented 3-palne の為す Grassmann 多様体 $G_3^+(\mathbf{R}^7) \cong SO(7)/SO(3)\times SO(4)$ は一般には G_2 の軌道としては表示できない. ここでは $G_3^+(\mathbf{R}^7)$ を以下のように G_2 で軌道分解する. 任意の 3 次元ベクトル空間 $V \in G_3^+(\mathbf{R}^7)$ とし, その正規直交基底を $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ とする. この時 $g \in G_2$ が存在して,

$$g(i) = e_1,\ g(j) = e_2$$

を満たす.

(1) $g(k) \neq e_3$ ならば $\dim\Big(span_{\mathbf{R}}\{g(k),\ e_3\}\Big) = 2$ である. このとき

$$< g(k),\ u >= 0$$

を満たす単位ベクトル $u \in span_{\mathbf{R}}\{g(k),\ e_3\}$ を取ることができる. $< g(k),\ e_3 >= \cos\theta\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと

$$e_3 = \cos\theta \cdot g(k) + \sin\theta \cdot u$$

となる. $u \in \Big(span_{\mathbf{R}}\{g(i),\ g(j),\ g(k)\}\Big)^{\perp}$ なので, 特に $u = g(\varepsilon)$ とおくことができ,

$$e_3 = g(\cos\theta \cdot k + \sin\theta \cdot \varepsilon)$$

となる.

(2) $g(k) = e_3$ は $\theta = 0$ の場合に対応する. このとき $V = span_{\mathbf{R}}\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ は associative plane となり, G_2 の軌道として表示できる.

従って

$$V = span\{g(i),\ g(j),\ g(\cos\theta \cdot k + \sin\theta \cdot \varepsilon)\}$$

を得る.

Theorem 2 *$\varphi_k\ : S^k \times \boldsymbol{R}^{6-k} \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ 内のリーマン等質な超曲面 (一般化された柱面) とする. ただし, S^k は原点を中心とする半径 1 の k 次元球面を表し, $\boldsymbol{R}^m$ は m 次元ユークリッド空間を表す. このとき次が成立する. ここで, $tr({}^t\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A})$, $tr({}^t\bar{\mathfrak{B}}\mathfrak{B})$ は第 2 基形式の J に関する分解の $(2,0)part$ と $(1,1)part$ の長さを表す.*

1. 誘導される概複素構造はただ 1 つ, かつ, 等質な超曲面

(M,φ_k)	$Aut(M,J,g)$	$Iso^+(M)$	$tr({}^t\bar{\mathfrak{B}}\mathfrak{B})$	$tr({}^t\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A})$
$\boldsymbol{R}^6$	$\boldsymbol{R}^6 \rtimes SU(3)$	$\boldsymbol{R}^6 \rtimes SO(6)$	0	0
$S^1 \times \boldsymbol{R}^5$	$U(2) \ltimes \boldsymbol{R}^5$	$SO(2) \times (SO(5) \ltimes \boldsymbol{R}^5)$	1/16	1/16
$S^5 \times \boldsymbol{R}^1$	$SU(3) \times \boldsymbol{R}^1$	$SO(6) \times \boldsymbol{R}^1$	9/16	1/16
S^6	G_2	$SO(7)$	3/4	0

2. 誘導される概複素構造はただ *1* つ, かつ, 等質ではない超曲面 $(x_1, x_2, y_0, y_1 q) \in \boldsymbol{R}^2 \times S^4$ $(q \in S^3,\ {y_0}^2 + {y_1}^2 = 1)$ に対して $\varphi_4 : \boldsymbol{R}^2 \times S^4 \to \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を $\varphi_4(x_1, x_2, y_0, y_1 q) = y_0 i + x_1 j + x_2 k + y_1 q\varepsilon$ と定義する. このとき

$$tr({}^t\bar{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}) = (3 + y_0^2)/2,\ tr({}^t\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}) = y_1^2/2.$$

ここで, $Iso^+(\boldsymbol{R}^2 \times S^4) = (\boldsymbol{R}^2 \rtimes SO(2)) \times SO(5)$ であり, $Aut(\boldsymbol{R}^2 \times S^4, J, g) = \boldsymbol{R}^2 \rtimes U(2)$ である.

3. 誘導される概複素構造の族は変形を持ち, かつ, それらはすべて等質な超曲面 $(qi\bar{q}, y_0, y_1, y_2, y_3) \in S^2 \times \boldsymbol{R}^4$ $(q \in S^3)$ に対して, 変形するパラメーターを α $(0 \leq \alpha \leq \pi/3)$ とし, 写像 $(\varphi_2)_\alpha : S^2 \times \boldsymbol{R}^4 \to \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を

$$\begin{aligned}
&(\varphi_2)_\alpha(qi\bar{q}, y_0, y_1, y_2, y_3) \\
&= \cos\alpha(qi\bar{q}) + \sin\alpha(qi\bar{q})\varepsilon \\
&+ y_0\varepsilon + y_1(-\sin\alpha i + \cos\alpha i\varepsilon) + y_2(-\sin\alpha j + \cos\alpha j\varepsilon) + y_3(-\sin\alpha k + \cos\alpha k\varepsilon),
\end{aligned}$$

と定義する. このとき

$$tr({}^t\bar{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}) = (1 + \cos^2 3\alpha)/2, \quad tr({}^t\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}) = (1 - \cos^2 3\alpha)/2.$$

ここで, $Iso^+(S^2 \times \boldsymbol{R}^4) = SO(3) \times (SO(4) \ltimes \boldsymbol{R}^4)$ であり, $Aut(S^2 \times \boldsymbol{R}^4, J, g) = Sp(1) \ltimes \boldsymbol{R}^4$ である.

注意 上記の $\{\alpha \mid 0 \leq \alpha < \pi/3\}$ が G_2-合同類の為す *moduli* 空間に対応する.

4. 誘導される概複素構造の族は変形を持ち, それらは等質ではない超曲面 (ただし, $\alpha = 0$ の時は等質である)
$(q_0, q_1, q_2, q_3, x_1, x_2, x_3) \in S^3 \times \boldsymbol{R}^3$ に対して, 変形するパラメーターを $\alpha(0 \leq \alpha \leq \pi/2)$ とし, 写像 $(\varphi_3)_\alpha : S^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \mathrm{Im}\,\boldsymbol{O}$ を

$$\begin{aligned}
(\varphi_3)_\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3, x_1, x_2, x_3) &= x_1(\cos\alpha i + \sin\alpha i\varepsilon) + x_2 j + x_3 k \\
&+ q_0(-\sin\alpha i + \cos\alpha i\varepsilon) + (q_1 i + q_2 j + q_3 k)\varepsilon,
\end{aligned}$$

と定義する. ただし ${q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 1$. このとき

$$tr({}^t\bar{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}) = \{2(1 - {q_1}^2)\sin^2\alpha + 3\}/16, \quad tr({}^t\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}) = \{-2(1 - {q_1}^2)\sin^2\alpha + 3\}/16.$$

ここに $A = \sqrt{1 - {q_0}^2 \sin^2\alpha}$. 従って $S^3 \times \boldsymbol{R}^3$ 上の誘導される概エルミート構造は $0 < \alpha < \pi/2$ のとき等質ではない.

注意 上記の $\{\alpha \mid 0 \leq \alpha < \pi/2\}$ が G_2-合同類の為す *moduli* 空間に対応する.

参考文献

[1] R. L. Bryant. Submanifolds and special structures on the octonions. J. Diff. Geom., 17 (1982) 185-232.

[2] E. Calabi. Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds. Trans.A.M.S, 87 (1958) 407-438.

[3] N.Ejiri. Equivaiant minimal immersions of S^2 into $S^{2m}(1)$. Trans. A.M.S., 297 (1986) 105-124.

[4] T.Fukami and S.Ishihara. Almost Hermitian structure on S^6. Tohoku. Math. J., 7 (1955) 151-156.

[5] R.Harvey and H.B.Lawson. Calibrated geometries. Acta Math., 148 (1982) 47-157.

[6] H.Hashimoto, T.Koda, K.Mashimo and K.Sekigawa Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-dimensional submanifolds in the octonions. Kodai Math. J.,30 (2007) 297-321.

[7] H.Hashimoto and K.Mashimo On some 3-dimensional CR submanifolds in S^6. Nagoya Math. J.,156 (1999) 171-185.

[8] H.Hashimoto. Characteristic classes of oriented 6-dimensional submanifolds in the octonians. Kodai Math. J.,16 (1993) 65-73.

[9] H.Hashimoto. Oriented 6-dimensional submanifolds in the octonions **III .** Internat. J. Math and Math. Sci., 18 (1995) 111-120.

[10] H. Hashimoto and M. Ohashi. Orthogonal almost complex structures on $S^2 \times \boldsymbol{R}^4$. Proceedings of the 9th International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields. World Sci. Publ. 2009.

[11] H. Hashimoto and M. Ohashi. Orthogonal almost complex structures of hypersurfaces of purely imaginary octonions. Preprint.

[12] S.Kobayashi and K.Nomizu. Foundations of Differential geometry **II.** Wiley-Interscience, New York. 1968.