旗多様体の実形の大域的タイト性

酒井 高司　（首都大学東京理工学研究科）

論文 [5] において Y.-G. Oh は Hermite 対称空間内の Lagrange 部分多様体についてタイト性の概念を定義し，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の大域的にタイトな Lagrange 部分多様体は全測地的な $\mathbb{R}P^n$ に限ることを示した．一方，大域的なタイト性の無限小版である局所的なタイト性については，竹内-小林 [8] がコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は局所的にタイトであることを示している．Düistermaat [1] は竹内-小林の結果をシンプレクティック幾何の観点から拡張し，コンパクトな等質 Kähler 多様体の実形は局所的にタイトであることを示している．

本稿で，Oh によるタイト性の概念を等質 Kähler 多様体の場合に拡張し，旗多様体 $F_n(\mathbb{C}^n)$ 内の実旗多様体として与えられる実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ とその正則等長変換群による像との交叉を決定する．その帰結として，$F_n(\mathbb{R}^n)$ が大域的にタイトな Lagrange 部分多様体であることを示す．本研究は入江博氏（東京電機大学）との共同研究である．

1　実形の大域的タイト性

Lagrange 部分多様体 L は連結，コンパクト，境界なしで埋め込まれたものとする．Oh [5] による大域的タイト性の概念は，次のように等質 Kähler 多様体で考えるのが自然である．

定義 1.1. $(M = G/K, \omega, J)$ を等質 Kähler 多様体とし，L を M の Lagrange 部分多様体とする．L と gL が横断的に交わるような M の任意の正則等長変換 $g \in G$ について

$$\#(L \cap gL) = SB(L, \mathbb{Z}_2) \tag{1.1}$$

が成り立つとき，L は**大域的にタイト** (globally tight) であるという．ここで，$SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数のベッチ数の和を表す．

また，恒等変換に近い $g \in G$ で L と gL が横断的に交わるものについて常に (1.1) が成り立つとき，L は**局所的にタイト** (locally tight) であるという．

Lagrange 部分多様体のタイト性の概念をこのように定義する動機として，次の Lagrage 交叉理論における Arnold-Givental の不等式がある．

定理 1.2 (Oh [6, 7], Fukaya-Oh-Ohta-Ono [2])**.** G/K をコンパクトな等質 Kähler 多様体とし，L を G/K の半正な実形とする．L と $\phi(L)$ が横断的に交わるような任意の Hamilton イソトピー $\phi \in \mathrm{Ham}(G/K)$ に対して，不等式

$$\#(L \cap \phi(L)) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ．

本研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) 20740044 の助成を受けたものである．

つまり，大域的タイトな Lagrange 部分多様体は正則等長変換で動かす範囲においては Arnold-Givental の不等式の等号を満たす．

ここで，Lagrange 部分多様体のタイト性に関して，現在までに得られている結果をまとめておく．まず，複素射影空間内の (局所的および大域的) タイトな Lagrange 部分多様体は Oh [5] により分類されている．また，論文 [4] では 2 次元の複素 2 次超曲面 $Q_2(\mathbb{C}) \cong S^2(1) \times S^2(1)$ のタイトな Lagrange 部分多様体を分類した．他に大域的タイトな Lagrange 部分多様体の例としては，Howard [3] が $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ の大域的タイト性を示している．最近，田崎 [10] は $Q_n(\mathbb{C})$ の実形の交叉を決定し，その大域的タイト性を示した．さらに，田中-田崎 [9] はコンパクト Hermite 対称空間の実形の大域的タイト性を証明している．今回の旗多様体の例は，Hermite 対称空間の実形以外での大域的にタイトな Lagrange 部分多様体の例となる．

2 旗多様体の実形の交叉と大域的タイト性

$\mathbb{C}^n$ 内の複素部分空間の列 $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ が $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ かつ $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ を満たすとき，$(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1})$ を $\mathbb{C}^n$ の旗と呼び，$\mathbb{C}^n$ 内の旗全体のなす集合を $F_n(\mathbb{C}^n)$ と表す．$F_n(\mathbb{C}^n)$ には $U(n)$ が推移的に作用し，等質空間として $F_n(\mathbb{C}^n) \cong U(n)/T^n$ と表される．ここで，$T^n \cong U(1) \times \cdots U(n)$ は $U(n)$ の極大トーラスである．$F_n(\mathbb{C}^n)$ には等質空間 $U(n)/T^n$ から Kähler 多様体の構造が誘導され，これを**旗多様体**と呼ぶ．

一方，$\mathbb{R}^n$ 内の部分空間の列 $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ が $\dim_{\mathbb{R}} W_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ かつ $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を満たすとき，$(W_1, W_2, \ldots, W_{n-1})$ を $\mathbb{R}^n$ の旗と呼び，$\mathbb{R}^n$ 内の旗全体のなす集合を $F_n(\mathbb{R}^n)$ と表す．$F_n(\mathbb{R}^n)$ には $O(n)$ が推移的に作用し，$T^n \cap O(n) \cong (\mathbb{Z}_2)^n$ がイソトロピー部分群になる．したがって，$F_n(\mathbb{R}^n)$ には等質空間 $O(n)/(\mathbb{Z}_2)^n$ から多様体構造が誘導され，これを実旗多様体と呼ぶ．

$U(n)$ には行列の各成分の複素共役をとる作用として対合的な自己同型 $\tilde{\sigma}$ が定まる．これは極大トーラス T^n を保存することから，$U(n)/T^n$ の反正則な対合的等長変換 σ を誘導する．$O(n) \subset U(n)$ が $\tilde{\sigma}$ の固定点集合であるから，σ による $U(n)/T^n$ の固定点集合は $O(n)/(T^n \cap O(n))$ となる．つまり，$F_n(\mathbb{R}^n)$ は $F_n(\mathbb{C}^n)$ の実形である．

実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ の $F_n(\mathbb{C}^n)$ への埋め込みは各部分空間の複素化により

$$\begin{array}{ccc} F_n(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & F_n(\mathbb{C}^n) \\ (V_1, \ldots, V_{n-1}) & \longmapsto & (V_1^{\mathbb{C}}, \ldots, V_{n-1}^{\mathbb{C}}) \end{array}$$

と記述できる．

補題 2.1. V を $\mathbb{C}^n$ の Lagrange 部分空間とする． このとき，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \cdots, v_n$ および $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$V = \{e^{\sqrt{-1}\theta_1} v_1, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} v_n\}_{\mathbb{R}}$$

と表すことができる．

証明 $U(n)/O(n)$ の極大トーラスの共役性による． □

この補題を用いると，実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ と合同な Lagrange 部分多様体は

$$gF_n(\mathbb{R}^n) = F_n(g\mathbb{R}^n), \quad g \in U(n)$$

と表される． ここで，補題 2.1 より，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \cdots, v_n$ および $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ が存在して，$g\mathbb{R}^n = \{e^{\sqrt{-1}\theta_1}v_1, \ldots, e^{\sqrt{-n}\theta_n}v_n\}_{\mathbb{R}}$ と表すことができる．これより，$F_n(\mathbb{R}^n)$ と $F_n(g\mathbb{R}^n)$ が横断的に交われば，その交叉 $F_n(\mathbb{R}^n) \cap F_n(g\mathbb{R}^n)$ には集合

$$\left\{ \left(\{v_{i_1}\}_{\mathbb{C}}, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}_{\mathbb{C}}, \ldots, \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}\}_{\mathbb{C}} \right) \,\middle|\, \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \right\} \subset F_n(\mathbb{C}^n) \quad (2.1)$$

が含まれる．この要素の個数は $n!$ である．

実は，交叉は上のものに限ることがわかる．

定理 2.2. 旗多様体 $F_n(\mathbb{C}^n)$ において，実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ と $F_n(g\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わるならば，その交叉 $F_n(\mathbb{R}^n) \cap F_n(g\mathbb{R}^n)$ は (2.1) に一致する．

証明 旗多様体 $F_n(\mathbb{C}^n)$ において，実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ と $F_n(g\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わるとする．点 $(V_1, \ldots, V_{n-1}) \in F_n(\mathbb{R}^n)$ と点 $(W_1, \ldots, W_{n-1}) \in F_n(g\mathbb{R}^n)$ を任意に取る．この 2 点が $F_n(\mathbb{C}^n)$ で一致しているとき，それが交点集合 (2.1) に含まれることを示せばよい．いま，

$$\begin{array}{ccccccc} F_n(\mathbb{C}^n) & \supset & F_n(\mathbb{R}^n) & \cap & F_n(u\mathbb{R}^n) & & : 横断的 \\ & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\ & & (V_1^{\mathbb{C}}, \ldots, V_{n-1}^{\mathbb{C}}) & = & (W_1^{\mathbb{C}}, \ldots, W_{n-1}^{\mathbb{C}}) & & \end{array}$$

である．

まず，第 1 成分 V_1, W_1 に着目する．0 でないベクトル $z_1 \in V_1$ と $w_1 \in W_1$ をとり

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^n z_1^i v_i \qquad (z_1^i \in \mathbb{R}) \\ w_1 &= \sum_{i=1}^n w_1^i v_1 \qquad (w_1^i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

と表す．このとき，$V_1^{\mathbb{C}} = W_1^{\mathbb{C}}$ より，0 でない $c_1 \in \mathbb{C}$ が存在して

$$c_1 z_1 = w_1$$

となる．したがって，

$$c_1 z_1^i = w_1^i e^{\sqrt{-1}\theta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．$z_1^1, \ldots z_1^n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではないので，今 $z_1^{i_1} \neq 0$ であるとする．このとき，ある $j (\neq i_1)$ について $z_1^j \neq 0$ であると仮定すると

$$c_1 = \frac{w_1^{i_1}}{z_1^{i_1}} e^{\sqrt{-1}\theta_{i_1}} = \frac{w_1^j}{z_1^j} e^{\sqrt{-1}\theta_j}$$

となる．ここで，z_1^i, w_1^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は実数であるから $\theta_{i_1} = \theta_j \pmod{\pi}$ となる．必要ならば v_j を $-v_j$ に取りかえることにより $\theta_{i_1} = \theta_j \pmod{2\pi}$ としてよい．しかしこのとき

$$g\mathbb{R}^n = e^{\sqrt{-1}\theta_{i_1}}\{v_{i_1}, v_j\}_{\mathbb{R}} \oplus \{e^{\sqrt{-1}\theta_1}v_1, \ldots, \overset{i_1}{\smile}, \ldots, \overset{j}{\smile}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_n}v_n\}_{\mathbb{R}}$$

となり，$F_n(\mathbb{R}^n)$ と $F_n(g\mathbb{R}^n)$ が横断的であることに反する．したがって，横断的であるならばすべての $j (\neq i_1)$ について $z_1^j = w_1^j = 0$ となり

$$V_1^{\mathbb{C}} = W_1^{\mathbb{C}} = \{v_{i_1}\}_{\mathbb{C}}$$

となる．

次に，第 2 成分 V_2, W_2 に着目する．$V_1 \subset V_2$, $W_1 \subset W_2$ であるから，0 でないベクトル

$$\begin{aligned} z_2 &= \sum_{i=2}^{n} z_2^i v_i \in V_2 \qquad (z_2^i \in \mathbb{R},\ z_2^{i_1} = 0) \\ w_2 &= \sum_{i=2}^{n} w_2^i e^{\sqrt{-1}\theta_i} v_i \in W_2 \qquad (w_2^i \in \mathbb{R},\ w_2^{i_1} = 0) \end{aligned}$$

をとり

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v_1, z_2\}_{\mathbb{R}} \\ W_2 &= \{e^{\sqrt{-1}\theta_1} v_1, w_2\}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

と表すことができる．このとき，$V_2^{\mathbb{C}} = W_2^{\mathbb{C}}$ より，0 でない $c_2 \in \mathbb{C}$ が存在して

$$c_2 z_2 = w_2$$

となる．したがって，

$$c_2 z_2^i = w_2^i e^{\sqrt{-1}\theta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．$z_2^1, \ldots z_2^n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではないので，今 $z_2^{i_2} \neq 0$ $(i_2 \neq i_1)$ であるとする．このとき，ある $j(\neq i_2)$ について $z_j \neq 0$ であると仮定すると，上の議論と同様にして，$F_n(\mathbb{R}^n)$ と $F_n(g\mathbb{R}^n)$ が横断的であることに反することが示される．したがって，横断的であるならばすべての $j(\neq i_2)$ について $z_2^j = w_2^j = 0$ となり

$$V_2^{\mathbb{C}} = W_2^{\mathbb{C}} = \{v_{i_1}, v_{i_2}\}_{\mathbb{C}}$$

となる．

以下，帰納的に交叉が (2.1) に一致することがわかる．□

系 2.3. 旗多様体 $F_n(\mathbb{C}^n)$ の実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ は大域的にタイトな Lagrange 部分多様体である．

$L = F_n(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/(\mathbb{Z}_2)^n$ の Poincaré 多項式 $P(F_n(\mathbb{R}^n))$ は

$$P(F_n(\mathbb{R}^n)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - s^i}{1 - s}$$

で与えられるから，

$$SB(L, \mathbb{Z}_2) = n!$$

である．よって，定理 2.2 より，L と gL が横断的に交わるならば

$$\#(L \cap gL) = n! = SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

となり，$L = F_n(\mathbb{R}^n)$ は $F_n(\mathbb{C}^n)$ の大域的タイトな Lagrange 部分多様体であることが示された．

□

3 あとがき

湯沢研究集会での講演時は，旗多様体 $F_n(\mathbb{C}^n)$ の実形 $F_n(\mathbb{R}^n)$ が大域的にタイトであるという結果について，積分幾何を使った別の方法で証明を与えた．湯沢研究集会での講演の後，田崎博之先生より有益なコメントをいただき，実形の大域的タイト性だけでなく交叉の配置も明らかになった．ここで用いた証明はさらに一般化することができ，広義の旗多様体の実形についても大域的タイト性を示すことができる．これに関して現在，田崎先生および入江氏と共同で研究を進めている．

参考文献

[1] J. J. Duistermaat, *Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed point sets of an antisymplectic involution*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 417–429.

[2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory.*

[3] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).

[4] H. Iriyeh and T. Sakai, *Tight Lagrangian surfaces in* $S^2 \times S^2$, to appear in Geom. Dedicata.

[5] Y.-G. Oh, *Tight Lagrangian submanifolds in* $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. **207** (1991), 409–416.

[6] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[7] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[8] M. Takeuchi and S. Kobayashi, *Minimal embeddings of R-symmetric spaces*, J. Differ. Geom. **2** (1968), 203–215.

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, in preparation.

[10] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, preprint.

〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1
首都大学東京大学院理工学研究科
数理情報科学専攻
酒井 高司
E-mail address : sakai-t@tmu.ac.jp