Tchebychev 作用素の消えない中心アファイン極小曲面

藤岡敦 (一橋大学)

§1. 序

中心アファイン極小超曲面は Wang ([10]) により, Euclid 空間内の非退化中心アファイン超曲面に対する中心アファイン計量の面積積分の停留超曲面として定義された, 中心アファイン微分幾何における研究対象である. Wang 自身は中心アファイン計量が定値な場合に上の面積積分の第一変分を計算し, 原点を中心とする固有アファイン超球面は中心アファイン極小超曲面であることを示した他, 第二変分も計算し, 中心アファイン計量が負定値な原点を中心とする固有アファイン超球面は安定で, 原点を中心とする楕円面は不安定であることを示した.

以下では曲面の場合に局所的に考えるが, このような状況, 即ち中心アファイン極小曲面についてですら, 本質的に新しい例は余り知られていない. また, Schief が [7] において示したように, 中心アファイン極小曲面は可積分系理論的な側面ももつ.

§2. 中心アファイン微分幾何

まず, 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を領域 D から $\mathbf{R}^3$ への写像 f として表しておき, (x_1, x_2) を局所座標とする. Euclid 微分幾何では $\mathbf{R}^3$ に標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が備わっていると考えるから, 曲面 f に対する単位法ベクトル場 n を定めることができる. このとき, Gauss の公式は Christoffel 記号 Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$ を用いて

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + \langle f_{x_i x_j}, n\rangle n \quad (i, j = 1, 2)$$

と表される.

一方, アファイン微分幾何では $\mathbf{R}^3$ はアファイン空間であり, n に代わって曲面と横断的に交わるベクトル場を考えることになる. このようなものとして曲面の位置ベクトルを選ぶことのできる曲面が中心アファイン曲面である. よって, f が中心アファイン曲面のとき, 中心アファイン曲面としての Gauss の公式は上とは異なる Christoffel 記号 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ $(i, j, k = 1, 2)$ 及び中心アファイン計量とよばれる $(0, 2)$ テンソル場 h を用いて

$$f_{x_i x_j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^1 f_{x_1} + \tilde{\Gamma}_{ij}^2 f_{x_2} - h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) f \quad (i, j = 1, 2)$$

と表される.

中心アファイン曲面は中心アファイン計量が非退化, 定値, 不定値の場合に応じて, それぞれ非退化, 定値, 不定値であるという. 上の 2 式と n の内積を取ることにより, 中心アファイン曲面が定値, 或いは不定値であることは Euclid Gauss 曲率がそれぞれ正, 或いは負であることと同値であることが分かる.

§3. 中心アファイン極小曲面

簡単のため f を不定値中心アファイン曲面とする. 局所座標として漸近線座標 (x, y) を選んでおき, f の Euclid Gauss 曲率 K 及び f の原点からの Euclid 支持関数 $d = \langle f, n \rangle$ を用いて

$$\rho = -\frac{1}{4} \log \left(-\frac{K}{d^4} \right)$$

とおく. このとき, ρ は原点を固定する等積アファイン変換, 即ち等積中心アファイン変換で不変な量となる. 中心アファイン計量の面積積分に対する第一変分を計算することにより, f が中心アファイン極小であることは $\rho_{xy} = 0$ であることと同値であることが分かる.

或いは, f を非退化中心アファイン曲面, $\tilde{\nabla}$ を中心アファイン曲面 f の誘導する接続, $\hat{\nabla}$ を f の中心アファイン計量 h の Levi-Civita 接続とする. このとき, 差テンソルとよばれる $(1, 2)$ テンソル場 C 及び中心アファイン Tchebychev ベクトル場とよばれるベクトル場 T が

$$C = \tilde{\nabla} - \hat{\nabla}, \quad T = \frac{1}{2} \mathrm{tr}_h C$$

により定められ, f が中心アファイン極小であることは中心アファイン Tchebychev 作用素 $\hat{\nabla} T$ のトレースが消えることと同値であることが分かる.

また,

$$T = \mathrm{grad}_h \rho$$

が成り立つことが分かり, $T = 0$ であることは ρ が一定であることと同値となる. Tzitzéica は [8] において, ρ が一定であるという性質が中心アファイン変換で不変であることを示し, ρ が一定となる曲面を S 曲面と名付けたが, これは原点を中心とする固有アファイン球面に他ならない.

§4. 中心アファイン極小曲面の例

まず, 原点を中心とする固有アファイン球面は $T = 0$ で特徴付けられる中心アファイン極小曲面である. 特に, 原点を中心とする楕円面, 一葉双

曲面, 二葉双曲面は中心アファイン極小曲面である. また, 原点を頂点とする楕円放物面, 原点を鞍点とする双曲放物面からそれぞれ原点を除いたものは $T=0$ ではないが $\hat{\nabla}T=0$ となる中心アファイン極小曲面である. 更に, Liu-Wang ([4]) は $\hat{\nabla}T=0$ となる中心アファイン曲面を分類し, 中心アファイン極小曲面の例を与えた.

§5. Tchebychev 作用素の消えない例

Vrancken ([9]) は $\hat{\nabla}T \neq 0$ で T が $\hat{\nabla}T$ の固有ベクトルとなる定値中心アファイン極小曲面がある 1 階の常微分方程式の解を用いて記述されることを示したが, 具体的な曲面の形は与えていない.

筆者は [1] において, 中心アファイン曲面の不変量の 1 つである 3 次微分にある種の対称性を仮定し, 中心アファイン計量の曲率 κ が一定の中心アファイン極小曲面を分類し, その中で $\hat{\nabla}T \neq 0$ となるものを具体的に得た. この例は $\kappa=1$ で、不定値な場合は

$$f=\left(\frac{e^{-u}}{u}\cos v, \frac{e^{-u}}{u}\sin v, 1-\frac{1}{u}\right)$$

と表され, Vrancken が調べた性質をみたすことが分かる.

また、[2] においては κ が一定で $\hat{\nabla}T$ が対角化可能でない中心アファイン極小曲面を, また [3] においては κ と Pick 関数 J が一定の中心アファイン極小曲面を分類した. なお, Pick 関数は §3 において現れた記号を用いて,

$$J=\frac{1}{2}\|C\|^2=\frac{1}{2}h_{kr}h^{ip}h^{jq}C_{ij}^{k}C_{pq}^{r}$$

により定められる. 上の二つの分類のどちらにおいても $\hat{\nabla}T$ の消えない新しい中心アファイン極小曲面の例を二つ得ることができた.

一つめは $\kappa=1$, $J=0$ で,

$$f=A'(u)+vA(u)$$

と表される線織面である. 但し, A は $\det\begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix}$ が 0 でない $\mathbf{R}^3$ 値関数である.

二つめは $\kappa=0$, $J=-1$ で,

$$f(x,y)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,1}(x)y^n, \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,2}(x)y^n, \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n,3}(x)y^n\right)$$

と表されるものである. 但し, (x, y) は $x_0 \neq 0$ となる $(x_0, 0)$ の周りにおける漸近線座標, $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}$ は微分方程式

$$x\varphi''' + \varphi'' - \varphi = 0$$

の線形独立な解で, 更に

$$\varphi_{n+1,i} = \frac{x}{n+1}\varphi''_{n,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

である.

複素線積分を用いて

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j + s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j - s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds$$

により定められる Meijer の G 関数は $\max\{p, q\}$ 階の微分方程式

$$\left\{(-1)^{p-m-n} z \prod_{j=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz} - a_j + 1\right) - \prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz} - b_j\right)\right\} G(z) = 0$$

をみたし, 多くの初等関数や特殊関数を表すことができることで知られている. 但し, m, n, p, q は $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$ をみたす整数で, $z \neq 0$ である. パラメータ $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$ に対する条件や積分経路 L の他, Meijer の G 関数に関する詳しいことについては [5] や [6] を参照されたい. 特に, 上の 3 階微分方程式の解は

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & c_1 G^{2,0}_{0,3}\left(\frac{x^2}{8} \middle| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \end{matrix}\right) + i c_2 G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{x^2}{8} \middle| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \end{matrix}\right) \\ & + c_3 G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{x^2}{8} \middle| \begin{matrix} - \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix}\right) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

によりあたえられる. なお, 右辺の第 2 項と第 3 項は一般化超幾何関数 ${}_0F_2$ を用いて表すことができる.

参考文献

[1] A. Fujioka. Centroaffine minimal surfaces with constant curvature metric. Kyungpook Math. J. **46** (2006), 297–305.

[2] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with non-semisimple centroaffine Tchebychev operator. Results Math. **56** (2009) 177–195.

[3] A. Fujioka. Centroaffine minimal surfaces whose centroaffine curvature and Pick function are constants. J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 694-700.

[4] H. Liu and C. Wang. The centroaffine Tchebychev operator. Results Math. **27** (1995), 77–92.

[5] A. M. Mathai. A handbook of generalized special functions for statistical and physical sciences. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[6] A. M. Mathai and R. K. Saxena. Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 348. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[7] W. K. Schief. Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry. Integrability and discretization. Chaos Solitons Fractals **11** (2000), 97–106.

[8] G. Tzitzéica. Sur une nouvelle classe de surfaces. Rendi. Circ. Mat. Palermo **25** (1908), 180–187; **28** (1909), 210–216.

[9] L. Vrancken, Centroaffine extremal surfaces. Soochow J. Math. **30** (2004), 377–390.

[10] C. P. Wang. Centroaffine minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Geom. Dedicata **51** (1994), 63–74.