

# 双曲平面の双曲空間への等長はめ込み

本田 淳史

ABSTRACT. 同じ定曲率を持つ空間型の中の超曲面としての等長はめ込みは、ユークリッド空間の場合は柱面、球面の場合には全測地的な埋め込みしかないように、自明なものに限ることが知られているが、双曲空間の場合には非自明な例が数多く知られている。本稿では、双曲平面の双曲空間への等長はめ込みの null 曲線による表現公式と、ある種のエンドの漸近挙動の平均曲率による特徴付けを紹介する。

## イントロダクション

双曲平面  $H^2$  の双曲空間  $H^3$  への等長はめ込みを考えよう。双曲空間  $H^3$  のはめ込まれた曲面の断面曲率を  $K$  とし、主曲率の積 (外的曲率) を  $K_{\text{ext}}$  とするとき、Gauss 方程式は  $K = K_{\text{ext}} - 1$  と表すことができる。従って、 $H^2$  の  $H^3$  への等長はめ込みは、 $H^3$  の外的曲率が常に 0 な曲面 (外的平坦曲面) で完備なものと同値であることがわかる。このとき、次が成り立つ。

命題 ([P, H]).  $H^3$  の完備な外的平坦曲面は可展面である。

ここで可展面とは測地線により生成される外的平坦曲面である。そこで、次の対応

$$H^3 \text{ の線織面} \longleftrightarrow \mathcal{L}(H^3) \text{ の曲線}$$

を考える。ここで、 $\mathcal{L}(H^3)$  は  $H^3$  の向き付けられた測地線の空間である。この対応のもと、可展面がどのような  $\mathcal{L}(H^3)$  の曲線を与えるのか調べたところ、次を得た：

定理 I ([H]).  $H^3$  の漸近的完備な可展面は、 $\mathcal{L}(H^3)$  の  $G$  に関して null で  $\check{G}$  に関して因果的な曲線と対応する。

ここで、 $G, \check{G}$  は  $\mathcal{L}(H^3)$  上の中間符号を持つ計量であり (定義 1.1 参照)、 $\mathcal{L}(H^3)$  の曲線  $\alpha = \alpha(s)$  が  $G$  に関して null とは、 $G(\alpha', \alpha') = 0$  を満たすときをいい、 $\check{G}$  に関して因果的とは、 $\check{G}(\alpha', \alpha') \leq 0$  を満たすときをいう。定理 I より、 $\mathcal{L}(H^3)$  の  $G$  に関して null で  $\check{G}$  に関して因果的な曲線を調べればよいことになる。

次に、因果的の特別な場合の null である場合を考える。すなわち、 $\mathcal{L}(H^3)$  の  $G$  と  $\check{G}$  とともに null である曲線を調べると、対応する可展面は 1 つのエンドが理想境界の 1 点に漸近することがわかる (命題 2.1)。このような完備可展面を理想円錐と呼ぶ。一方で、完備可展面の平均曲率の挙動は 2 種類に分類され (補題 2.2)、その一つを指数型可展面と呼ぶ (定義 2.3)。理想円錐は指数型可展面であるが、逆に、次がわかる：

定理 II ([H]). 実解析的な指数型可展面は理想円錐である。

実解析的でない指数型可展面で理想円錐でないものが存在するので (例 2.4 参照)、定理 II の実解析的という条件は本質的である。

## 1. 向き付けられた測地線の空間と可展面の NULL 曲線による表現

双曲空間の向き付けられた測地線の空間を  $\mathcal{L}(H^3)$  で表す．測地線の空間  $\mathcal{L}(H^3)$  は 4 次元多様体であり，さらに， $H^3$  のミニツイスター空間と呼ばれる複素曲面  $(\mathcal{L}(H^3), J)$  となることが知られている [Hi] (付録 A 参照)．

ミニツイスター空間  $(\mathcal{L}(H^3), J)$  の局所正則座標系  $(\mu_1, \mu_2)$  を用いて， $\mathcal{L}(H^3)$  の計量を定義しよう．向き付けられた測地線  $[\gamma] \in \mathcal{L}(H^3)$  の代表元，すなわち弧長パラメータ表示を  $\gamma = \gamma(t)$  とするとき，

$$\gamma_+ := \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t), \quad \gamma_- := \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$$

は代表元の取り方に依らず，理想境界  $\partial H^3$  の元を定める．そこで， $\partial H^3$  をリーマン球面  $C \cup \{\infty\}$  と同一視したとき

$$(1.1) \quad \mu_1 := -\gamma_-, \quad \mu_2 := \frac{1}{\gamma_+}$$

と定めると， $(\mu_1, \mu_2)$  は複素曲面  $(\mathcal{L}(H^3), J)$  の局所正則座標系を与える．この座標系を用いて， $\mathcal{L}(H^3)$  の計量を定義しよう．

定義 1.1.  $C$ -値対称 2 階の共変テンソル  $\mathcal{G}$  を，

$$(1.2) \quad \mathcal{G} := \frac{4d\mu_1 d\bar{\mu}_2}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_2)^2}$$

と定め， $G = \text{Im } \mathcal{G}$ ,  $\check{G} = \text{Re } \mathcal{G}$  とする．

計量  $G, \check{G}$  は複素曲面  $(\mathcal{L}(H^3), J)$  の中間符号を持つ Kähler 計量である (付録 A において  $G, \check{G}$  の性質を紹介する)．この設定のもと，定理 I が成り立つ．

## 2. 理想錐面と指数型可展面

理想錐面.

定理 I により， $H^3$  の漸近的完備な可展面を調べるには， $\mathcal{L}(H^3)$  の  $G$  に関して null で  $\check{G}$  に関して因果的な曲線を調べればよいことになるが，その特別な場合である  $G$  と  $\check{G}$  とともに null である曲線を考えると次がわかる．

命題 2.1.  $\mathcal{L}(H^3)$  の  $G$  と  $\check{G}$  とともに null である曲線に対応する漸近的完備な可展面は 1 つのエンドが理想境界の 1 点に漸近する．

このような 1 つのエンドが理想境界の 1 点に漸近する完備な可展面を理想錐面と呼ぶことにする．

指数型可展面.

一方， $H^3$  の可展面の平均曲率の挙動は次のようになる：

補題 2.2 (双曲的 Massey の補題). 可展面の非臍点集合に含まれる各漸近線  $l$  の弧長パラメータを  $t$  とすると，平均曲率  $H$  は  $l$  上で

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{H} \right) = \frac{1}{H}$$

を満たす．

双曲的 Massey の補題 (補題 2.2) により, 平均曲率  $H$  は

$$\frac{1}{H} = \begin{cases} \sqrt{P^2 - Q^2} \cosh\left(t + \frac{1}{2} \log \frac{P+Q}{P-Q}\right) & (\text{if } P > |Q|), \\ Pe^{\pm t} & (\text{if } P = |Q|), \\ \sqrt{Q^2 - P^2} \sinh\left(t + \frac{1}{2} \log \frac{Q+P}{Q-P}\right) & (\text{if } P < |Q|). \end{cases}$$

を満たすことになるが, 完備な可展面においては, 平均曲率が発散する点が生じる 3 番目の状況は起こらないことがわかる．

定義 2.3 (指数型可展面).  $H^3$  の完備な可展面で, 非臍点集合に含まれる各漸近線上で, 平均曲率が漸近線の弧長  $t$  に関して  $e^{\pm t}$  に比例するものを指数型可展面と呼ぶ．

理想錐面は指数型可展面であるが, 実解析的な場合はその逆, すなわち, 定理 II が成り立つ．定理 II において, 実解析的という仮定は外すことができない．実解析的でない指数型可展面で理想境界の 1 点以上の点に漸近する可能性がある (例 2.4 参照)．

例 2.4 (実解析的でない指数型可展面). ここでは, 実解析的でない指数型可展面で, 理想境界  $\partial H^3 = C \cup \{\infty\}$  の 2 点  $0$  と  $\infty$  に漸近するものの図を紹介する (図 1 参照)．

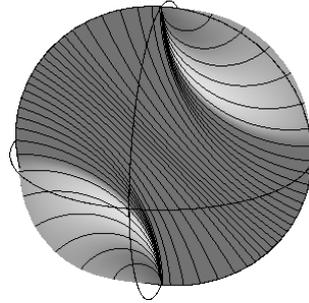


FIGURE 1. 理想境界の異なる 2 点に漸近する実解析的でない指数型可展面.

## APPENDIX A. 測地線の空間の幾何構造

双曲空間  $H^3$  の等長変換群の単位元の連結成分  $\text{Isom}_0(H^3) = \text{PSL}(2, C)$  の  $\mathcal{L}(H^3)$  への自然な作用で不変な  $\mathcal{L}(H^3)$  の計量を不変計量と呼ぶ．測地線の空間  $\mathcal{L}(H^3)$  の任意の不変計量は, 定義 1.1 の計量  $G, \check{G}$  の線形結合で書けるが [S], 本稿での議論では特に,  $G, \check{G}$  の二つが重要な役割を果たした．ここでは  $\mathcal{L}(H^3)$  上の様々な幾何構造を考えることで, 不変計量  $G, \check{G}$  の性質や特徴付け (詳しくは [H] を参照) を考察する．

### A.1. 測地線の空間の幾何構造.

### A.1.1. 標準シンプレクティック形式.

双曲空間  $H^3$  の単位接束  $UH^3$  の標準接触形式 (Liouville 形式) を  $\Theta$ , すなわち  $\Theta_{(p,v)}(w) := \langle v, \pi_* w \rangle$  とする (ただし,  $(p, v) \in UH^3, w \in T_{(p,v)}UH^3, \pi : UH^3 \ni (p, v) \mapsto p \in H^3$ ). 点  $(p, v) \in UH^3$  に対し, 測地線  $\gamma_{p,v}$  を始点が  $p \in H^3$  で, 単位初速度  $v$  を持つ測地線とし,  $\hat{\pi} : UH^3 \rightarrow \mathcal{L}(H^3)$  を  $\hat{\pi}(p, v) := [\gamma_{p,v}]$  とする. このとき,  $\mathcal{L}(H^3)$  上のシンプレクティック形式  $\omega$  で  $\hat{\pi}^* \omega = d\Theta$  を満たすものを標準シンプレクティック形式と呼ぶ.

### A.1.2. ミニツイスター複素構造.

測地線の空間の点  $[\gamma] \in \mathcal{L}(H^3)$  における接空間は,  $\gamma$  の測地変分の直交方向の変分ベクトル場の集まりなので,  $\gamma$  に沿う直交ヤコビ場全体  $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$  と同一視できる. このとき,  $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$  の概複素構造を  $J_{[\gamma]}(V) := \gamma' \times_\gamma V, (V \in \mathcal{J}^\perp(\gamma))$  と定義すると, これは可積分である [Hi]. この  $J$  をミニツイスター複素構造と呼ぶ.

### A.1.3. パラ複素構造.

測地線の空間には, パラ複素構造  $P$  が存在することが知られている [KK, Ka, Ki]. そのパラ複素構造  $P$  は, 式 (1.1) のミニツイスター空間  $(\mathcal{L}(H^3), J)$  の局所正則座標系  $(\mu_1, \mu_2)$  を用いて  $P(\partial/\partial\mu_1) = -\partial/\partial\mu_1, P(\partial/\partial\mu_2) = \partial/\partial\mu_2$  と表すことができる.

## A.2. 幾何構造と不変計量の関係.

測地線の空間  $\mathcal{L}(H^3)$  の不変計量は全て  $J$  に関して Kähler で  $P$  に関してパラ Kähler である. 従って定義 1.1 の計量  $G, \check{G}$  は  $J, P$  だけではとらえられないが, 標準シンプレクティック形式  $\omega$  を加えると特徴付けられる:

**命題 A.1.** 不変計量  $G, \check{G}$ , ミニツイスター複素構造  $J$ , パラ複素構造  $P$  と標準シンプレクティック形式  $\omega$  に対して

$$G = 2\omega(J \cdot, \cdot), \quad \check{G} = 2\omega(P \cdot, \cdot).$$

### A.3. $SL(2, C)$ の Killing 形式と $\mathcal{G}$ の関係.

特殊線形群  $SL(2, C)$  の  $H^3$  への等長的な作用は,  $UH^3$  と  $\mathcal{L}(H^3)$  への推移的な作用を誘導し,  $H^3 = SL(2, C)/SU(2), UH^3 = SL(2, C)/U(1), \mathcal{L}(H^3) = SL(2, C)/GL(1, C)$  と等質空間表示され, それらの間の自然な射影は前節 A.1.1 の  $\pi, \hat{\pi}$  となる. ここで,  $B$  を  $\mathfrak{sl}(2, C) = \text{Lie } SL(2, C)$  の Killing 形式の  $1/2$  倍とすると,  $B$  は  $\mathcal{L}(H^3)$  に  $C$ -値対称 2 階の共変テンソル  $B_L$  を,  $\text{Re } B$  は  $UH^3$  に符号数  $(2, 3)$  の擬リーマン計量  $\text{Re } B_U$  を誘導し,  $\pi, \hat{\pi}$  が擬リーマン沈め込みとなる. その意味で次の図式が両立すると言える:

$$\begin{array}{ccc} & (UH^3 = SL(2, C)/U(1), \text{Re } B_U) & \\ \pi \swarrow & & \searrow \hat{\pi} \\ (H^3 = SL(2, C)/SU(2), \langle \cdot, \cdot \rangle) & & (\mathcal{L}(H^3) = SL(2, C)/GL(1, C), \text{Re } B_L) \end{array}$$

このとき,  $\mathcal{L}(H^3)$  の  $C$ -値対称テンソル  $B_L$  と定義 1.1 の  $\mathcal{G}$  との関係は次のようになる:

**命題 A.2.**

$$B_L = -\mathcal{G}.$$

## A.4. 不変計量と Fubini-Study 計量の関係.

最後に,  $\mathcal{L}(H^3)$  での標準的な球面の実現と Fubini-Study 計量の関係を紹介する.

$$\mathcal{L}_0(H^3) := \{[\gamma] \in LH^3 \mid \gamma \text{ は原点 } o = (0, 0, 0) \in B^3 \text{ を通る}\}$$

とし, 包含写像を  $\iota: \mathcal{L}_0(H^3) \hookrightarrow \mathcal{L}(H^3)$  とする. ただし,  $B^3$  はポアンカレボールモデル

$$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, 4(dx^2 + dy^2 + dz^2)/(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2$$

を表す. このとき,  $\mathcal{L}_0(H^3)$  はリーマン球面  $P^1 = \{\mu \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}\}$  となる (図 2 参照).

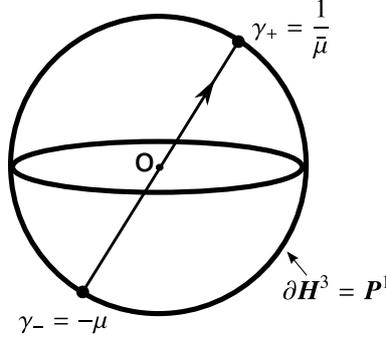


FIGURE 2. 原点  $o = (0, 0, 0) \in B^3$  を通る測地線.

命題 A.3. 定曲率 1 を持つ Fubini-Study 計量を  $g_{FS}$  とするとき,

$$\iota^* \mathcal{G} = g_{FS}.$$

定義 1.1 の  $\mathcal{G}$  の符号は, この球面の計量が  $\mathcal{L}(H^3)$  で正定値となるように定めている.

## REFERENCES

- [GG] N. GEORGIU AND B. GUILFOYLE, On the space of oriented geodesics of Hyperbolic 3-space, Rocky Mountain J. Math., **40** (2010), 1183–1219.
- [Hi] T. J. Hitchin, *Monopoles and Geodesics*, Commun. Math. Phys., **83** (1982), 579–602.
- [H] A. HONDA, Isometric Immersions of the Hyperbolic Plane into the Hyperbolic Space, preprint, Sugaku Preprint Series, **158** (2010), arXiv: 1009.3994.
- [Ka] M. Kanai, *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **8** (1988), no. 2, 215–239.
- [KK] S. KANEYUKI AND M. KOZAI, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math., **8** (1985), no. 1, 81–98.
- [Ki] M. Kimura, *Space of geodesics in hyperbolic spaces and Lorentz numbers*, Mem. Faculty of Sci. and Engi. Shimane Univ., **36** (2003), 61–67.
- [N] K. NOMIZU, Isometric Immersions of the Hyperbolic Plane into the Hyperbolic Space, Math. Ann., **205** (1973), 181–192.
- [P] E. Portnoy, *Developable surfaces in hyperbolic space.*, Pacific J. Math., **57** (1975), no. 1, 281–288.
- [S] M. Salvai, *On the geometry of the space of oriented lines of the hyperbolic space*, Glasgow Math. J., **49** (2007), 357–366.