

# Calibrate された部分多様体のグラフ表示

今城洋亮 (京都大学 D1)\*

本稿は部分多様体論・湯沢 2010(11月25日, 26日, 27日)の講演記録である.

$m, n$  を  $1 < m < n$  なる整数とする.  $n$  次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^n$  を考える.

定義 1 (Harvey and Lawson [2]).  $\phi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_m \rightarrow \mathbb{R}$  を歪対称  $m$  重線型形式とする. そのとき,  $\phi$  が calibration であるとは

$$\sup_{v_1, \dots, v_m \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系をなす}} \phi(v_1, \dots, v_m) = 1$$

が成り立つことをいう.  $m$  を  $\phi$  の次数と呼ぶ.

定義 2 (Harvey and Lawson [2]).  $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の次数  $m$  の calibration とする.  $S \subset \mathbb{R}^n$  を向き付けられた  $m$  次元部分空間とする. そのとき,  $S$  が  $\phi$  部分空間であるとは,  $S$  の向きに適合する任意の正規直交基底  $(v_1, \dots, v_m)$  に対して

$$\phi(v_1, \dots, v_m) = 1$$

が成り立つことをいう.

定義 3 (Harvey and Lawson [2]).  $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の次数  $m$  の calibration とする.  $M \subset \mathbb{R}^n$  を向き付けられた  $m$  次元部分多様体とする. そのとき,  $M$  が  $\phi$  部分多様体であるとは,  $M$  の各点  $x$  において接空間  $T_x M$  が  $\phi$  部分空間であることをいう.

$\phi$  部分多様体を  $\phi$  に関して calibrate された部分多様体とも呼ぶ.

定理 1 (Harvey and Lawson [2]).  $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の次数  $m$  の calibration とする.  $M \subset \mathbb{R}^n$  を  $\phi$  部分多様体とする. そのとき,  $M$  は極小部分多様体である.

$0 < b < a$  なる実数  $a, b$  に対し,  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $A(b, a)$  を次のように定義する.

$$A(b, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b < |x| < a\}.$$

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  上のベクトル場  $V$  を次のように定義する.

$$V(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

$\mathbb{R}^n$  の  $m$  次元部分空間  $S$  に対し,  $\mathbb{R}^n$  から  $S$  への射影を  $P_S$  と表す.

定義 4.  $a, b$  を  $0 < b < a$  なる実数とする.  $M$  を  $A(b, a)$  の  $m$  次元部分多様体とする. そのとき,  $M$  のエネルギーを次の非負実数または無限大として定義する.

$$(M \text{ のエネルギー}) = \int_{x \in M} \frac{1}{|x|^m} |P_{T_x M^\perp}(V(x))|^2 d\mu(x). \quad (1)$$

\* 本研究は科研費 (課題番号:22-699) の助成を受けたものである。

ただし,  $T_x M^\perp$  は  $T_x M \subset \mathbb{R}^n$  の直交補空間を表し,  $d\mu$  は  $M$  の体積要素を表す.

命題 2.  $a, b$  を  $0 < b < a$  なる実数とする.  $S \subset \mathbb{R}^n$  を  $m$  次元部分空間とする.  $M = S \cap A(b, a)$  とおく. そのとき,

$$(M \text{ のエネルギー}) = 0.$$

証明.  $S \subset \mathbb{R}^n$  は部分空間であるので,  $V$  は  $S$  に接する. すなわち,

$$V(x) \in T_x S, x \in S.$$

定義により  $T_x M = T_x S$ ,  $x \in M$  であるので,

$$V(x) \in T_x M, x \in M.$$

すなわち,

$$P_{T_x M^\perp}(V(x)) = 0, x \in M.$$

定義式 (1) により,

$$(M \text{ のエネルギー}) = 0.$$

□

$0 < b < a$  なる実数  $a, b$  および  $\mathbb{R}^n$  の部分空間  $S$  が与えられたとき,  $C^1$  級函数

$$f : S \cap A(b, a) \rightarrow S^\perp$$

に対し,  $f$  のグラフ  $\text{Graph}(f)$  および  $f$  の  $C^1$  ノルム  $|f|_{C^1}$  を次のように定義する.

$$\text{Graph}(f) = \left\{ \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + |f(x)|^2}} (x + f(x)) \mid x \in S \cap A(b, a) \right\},$$

$$|f|_{C^1} = \sup_{x \in S \cap A(b, a)} (|f(x)| + |df(x)|).$$

注意 1.  $\text{Graph}(f)$  は  $A(b, a)$  の  $C^1$  級部分多様体である.

定理 3 (原論文 [4] の Theorem 6.2).  $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の次数  $m$  の calibration とする.  $S \subset \mathbb{R}^n$  を  $\phi$  部分空間とする.  $a, b, c$  を  $0 < c < b < a < 1$  なる実数とする. そのとき, ある  $\delta > 0$  が存在して以下が成り立つ.

$M$  が  $A(c, 1)$  の閉じた  $\phi$  部分多様体であって,

$$(M \text{ のエネルギー}) \leq \delta \tag{2}$$

が成り立ち, ある  $C^1$  級函数  $f : S \cap A(a, 1) \rightarrow S^\perp$  が存在して

$$\begin{aligned} \text{Graph}(f) &= M \cap A(a, 1), \\ |f|_{C^1} &\leq \delta \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つならば, ある  $C^1$  級函数  $g : S \cap A(b, 1) \rightarrow S^\perp$  が存在して

$$\text{Graph}(g) = M \cap A(b, 1). \tag{4}$$

注意 2. 最後の結論 (4) を次のように置き換えても定理 3 は正しい .

$$\text{Graph}(g) = M \cap A(b, 1),$$

$$g|_{S \cap A(a, 1)} = f.$$

注意 3.  $M$  に関する上記の命題について, 仮定が成り立つような  $M$  は常に存在する . すなわち, 任意の  $\delta > 0$  に対し,  $A(c, 1)$  の閉じた  $\phi$  部分多様体  $M$  が存在して条件 (2), (3) が成り立つ . 実際,  $M = S \cap A(c, 1)$  とおけば, 命題 2 により (2) が成り立ち, また  $f = 0$  とおけば (3) が成り立つ .

定理 3 の証明の概略. 定理 3 に述べられているような  $\delta > 0$  が存在しないと仮定する . 注意 3 を考慮すると,  $A(c, 1)$  の閉じた  $\phi$  部分多様体の列  $(M_i)_{i=1, 2, \dots}$  であって以下の性質を持つものが存在する .

まず,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (M_i \text{ のエネルギー}) = 0 \quad (5)$$

が成り立ち, また, 各  $i = 1, 2, \dots$  に対し, ある  $C^1$  級関数  $f_i : S \cap A(a, 1) \rightarrow S^\perp$  が存在して

$$\begin{aligned} \text{Graph}(f_i) &= M_i \cap A(a, 1), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i|_{C^1} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

が成り立つが, いかなる  $i = 1, 2, \dots$  および, いかなる  $C^1$  級関数  $g : S \cap A(b, 1) \rightarrow S^\perp$  に対しても

$$M_i \cap A(b, 1) \neq \text{Graph}(g) \quad (7)$$

が成り立つ .

補題 4.  $M_i, i = 1, 2, \dots$  の体積は有界である . すなわち,

$$\sup_{i=1, 2, \dots} (M_i \text{ の体積}) < \infty.$$

補題 4 の証明については後に触れる . 補題 4 を認めると, Allard のコンパクト性定理 [1, Theorem 5.6] により,  $(M_i)_{i=1, 2, \dots}$  は varifold の意味で収束部分列  $(M_{i_j})_{j=1, 2, \dots}$  を持つ . そこで,

$$M_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} M_{i_j} \quad (8)$$

とおく .  $M_\infty$  は rectifiable varifold である .  $(M_i)_{i=1, 2, \dots}$  の性質 (5), (6) により,

$$(M_\infty \text{ のエネルギー}) = 0, \quad (9)$$

$$M_\infty \cap A(a, 1) = S \cap A(a, 1) \quad (10)$$

が成り立つ . (より正確には, rectifiable varifold に対してもエネルギーは定義 4 と同様に定義され, その上で等式 (9) が成り立つ . また, 式 (10) は varifold としての等式である .) これらの性質 (9), (10) から

$$M_\infty = S \cap A(c, 1)$$

が導かれる . (この式も varifold としての等式である .)  $M_\infty$  の定義 (8) により,  $(M_{i_j})_{j=1, 2, \dots}$  は  $S \cap A(c, 1)$  に varifold として収束する . Allard の regularity 定理 [1, Theorem 8.19] により,  $(M_{i_j})_{j=1, 2, \dots}$  は  $S \cap A(c, 1)$  に局所  $C^1$  収束する . このことは  $(M_i)_{i=1, 2, \dots}$  の性質 (7) に矛盾する .

したがって, 定理 3 は正しい . □

なお、講演では述べなかったが、以下では補題 4 の証明の概略を述べる。

補題 4 の証明の概略. まず、 $\phi$  を  $\mathbb{R}^n$  上の微分形式とみなす。 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  上の  $m-1$  次微分形式  $\psi$  を次が成り立つように定義する。

$$mr^{m-1}\psi = \partial_r \lrcorner \phi.$$

ただし、 $r$  は  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  上の原点からの距離関数である。このとき、 $r$  方向の微分  $\partial_r$  は  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  上のベクトル場を定めることに注意する。ベクトル場  $r\partial_r$  に沿う Lie 微分を  $\phi$  にほどこすことにより、次のことが分かる。

$$\begin{aligned} \phi &= d(r^m \psi) \\ &= mr^{m-1} dr \wedge \psi + r^m d\psi \end{aligned} \quad (11)$$

Harvey と Lawson の補題 [2, Lemma 5.11 Equation (5.13) p65] を  $\psi$  を用いて書き直すことによって、次のことが分かる。

$M$  を  $A(c, 1)$  の閉じた  $\phi$  部分多様体とすると、

$$(M \text{ のエネルギー}) = \int_M d\psi.$$

さらに、 $c'', c', c'' < c'$  が  $r|_M : M \rightarrow (c, 1)$  の正則値であるならば、Stokes の定理により、

$$(M \cap A(c'', c') \text{ のエネルギー}) = \int_{M \cap \{x:|x|=c'\}} \psi - \int_{M \cap \{x:|x|=c''\}} \psi.$$

特に、

$$\int_{M \cap \{x:|x|=c'\}} \psi \geq \int_{M \cap \{x:|x|=c''\}} \psi. \quad (12)$$

一方、 $\phi$  部分多様体の定義により、

$$(M \text{ の体積}) = \int_M \phi.$$

この式の右辺に (11) を代入すると、

$$\begin{aligned} (M \text{ の体積}) &= \int_M mr^{m-1} dr \wedge \psi + r^m d\psi \\ &= \int_c^1 mr^{m-1} dr \int_{M \cap \{x:|x|=r\}} \psi + \int_M r^m d\psi. \end{aligned} \quad (13)$$

さて  $M$  は (5), (6) に相当する性質を持つとしてよい。(13) の右辺第一項は (12) および (6) により評価される。(13) の右辺第二項は (5) により評価される。これが補題 4 の証明の概略である。□

定理 3 は Simon [7, Lemma 3 p561] の補題の類似物である。Simon は孤立特異点を持つ極小部分多様体の孤立特異点における接錘の一つが重複度 1 の滑らかな錘であるとき、それが唯一の接錘であることを証明した。

定理 3 ではエネルギーが重要な役割を果たす。エネルギーの定義 4 は Hofer [3] のアイデアに基づいている。擬正則曲線は calibrate された部分多様体の例であるが、Hofer [3, pp 534–539] はあるエネルギーを導入して擬正則曲線の bubble off を制御した。定義 4 は Hofer のエネルギーの一般化である。

calibrate された部分多様体の例としてスペシャルラグランジュ部分多様体がある。Lee [6] および Joyce [5] はスペシャルラグランジュ部分多様体の錘型孤立特異点の解消を行った。定理 3 はこのような特異点の解析に応用できると考えられる。

## 参考文献

- [1] W.K. Allard, *On the First Variation of a Varifold*, The Annals of Mathematics, Second series, Vol. 95, No.3 (May, 1972), pp. 417–491
- [2] R. Harvey and H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Mathematica **148** (1982), 47–157.
- [3] H. Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Inventiones mathematicae **114** (1993), 515–563
- [4] 今城 洋亮, 円環に収束するスペシャルラグランジュ部分多様体, 京都大学 2009 年度修士論文.
- [5] D.D. Joyce *Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. III. Dessingularization, the unobstructed case*, Annals of Global Analysis and Geometry **26** (2004), 1–58
- [6] Yng-Ing Lee *Embedded Special Lagrangian Submanifolds in Calabi-Yau Manifolds* Communications in Analysis and Geometry, Volume 11, Number 3, 391–423, 2003
- [7] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol.118, No.3 (Nov, 1983), 529–571