対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換

長友康行
九州大学大学院数理学研究院

定義 1. リーマン多様体 (M, g) 上の $\mathbf{R}^k$ 値関数 $f : M \to \mathbf{R}^k$ が**等径関数**であるとは、$f = (f_1, \cdots, f_k)$ とおいたときに、

(1) $\langle df_i, df_j \rangle = F_{ij}(f_1, \cdots, f_k)$
(2) $\Delta f_i = G_i(f_1, \cdots, f_k)$

となる関数 $F_{ij}, G_i : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ が存在することである。

(G, K) をコンパクト型の既約対称対であるとする。ただし、コンパクトリー群 G は単連結であり、その閉部分群 K は連結であるとする。コンパクト対称空間 G/K 上のベクトル束とその切断を利用して、以下のように関数を定義する。

まず、W を G 不変スカラー積をもつ、主軌道が余次元 1 の球面となる G の既約表現とする。次にその表現を部分群 K に制限して得られる K 表現を考え、W を K 既約表現に分解する。

$$W = U_0 \oplus V_0, \quad \dim U_0 = p, \dim V_0 = q.$$

(W 自身が K 既約表現となる場合も存在するが、このような場合は除く。) 等質ベクトル束を $U := G \times_K U_0$, $V := G \times_K V_0$ とおく。Frobenius の相互律より、

$$W \subset \Gamma(U), \quad \Gamma(V)$$

とみなせる。そこで、$w \in W$ ($|w| = 1$) に対応する $U \to G/K$, $V \to G/K$ の切断をそれぞれ、$s \in \Gamma(U)$, $t \in \Gamma(V)$ とおく。$w \in W$ の固定部分群を $H \subset G$ とおく。

このとき、$(V \to G/K, W)$ による誘導写像 [2]

$$i : G/K \to Gr_p(W), \quad i(gK) = gU_0 \subset W$$

が等長写像となるように G/K の計量を入れる。すると、$i : G/K \to Gr_p(W)$ は全測地的部分多様体となり、また $n = \dim G/K$ とすれば、W が実表現の場合には、W はベクトル束 $U \to G/K$, $V \to G/K$ の切断に作用するラプラス作用素の固有値 $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{q}$ に対応する固有空間となる。W が複素表現の場合には、W は固有値 $\frac{n}{2p}$, $\frac{n}{2q}$ に対応する固有空間となる [2]。

関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ を考察する。

$$S_0 := \left\{ x \in G/K \mid |s|^2 = 0 \right\}, \quad S_M := \left\{ x \in G/K \mid |s|^2 = 1 \right\}$$

とおく。

定理 2. [1] 関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ の臨界点のなす集合は $S_0 \cup S_M$ となる。S_0, S_M ともに H-軌道であり、G/K の全測地的部分多様体となる。

次に、$c \in (0,1)$ とすれば、上の定理より、c は $|s|^2$ の正常値である。

補題 3. 以下の 3 つの場合を除いて、$S_c := (|s|^2)^{-1}(\{c\})$ も H-軌道となる。(したがって H の G/K への作用は余等質次元 1 の作用となる。)

$$(G/K, W) : (\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbf{C}^n), \quad \left(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n}\right), \quad \left(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9\right).$$

ここで、S_9 は $\mathrm{Spin}(9)$ の実スピン表現である。それぞれの H 作用の主軌道の余次元は $2, 3, 2$ となる。

定理 4. H の G/K への作用が余等質次元 1 の場合には、$|s|^2$ は等径関数となる。

$$\left|d|s|^2\right| = \begin{cases} 2|s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W: \text{実表現}, \\ |s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W: \text{複素表現}. \end{cases}$$

$$\Delta|s|^2 = \begin{cases} \frac{2nN}{pq}\left(|s|^2 - \frac{p}{N}\right), & W: \text{実表現}, \\ \frac{nN}{pq}\left(|s|^2 - \frac{p}{N}\right), & W: \text{複素表現}. \end{cases}$$

$(\dim W = N.)$ さらに、S_c の主曲率も $|s|^2$ の関数として具体的に記述できる。ただし、主曲率は対称空間と表現 W によってその表示が変化する。

定理 5. $\left(Gr_p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{|s|}{|t|}, \quad -\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $q-1$, $p-1$, $(p-1)(q-1)$ となる。

定理 6. $\left(Gr_p(\mathbf{C}^N), \mathbf{C}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{\sqrt{2}|t|}, \quad -\frac{|t|}{\sqrt{2}|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 1, $2(q-1)$, $2(p-1)$, $2(p-1)(q-1)$ となる。

定理 7. $\left(Gr_p(\mathbf{H}^N), \mathbf{H}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{2|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{2|t|}, \quad -\frac{|t|}{2|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 3, $4(q-1)$, $4(p-1)$, $4(p-1)(q-1)$ となる。

定理 8. $(Gr_4(\mathbf{R}^7), S_7)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{|s||t|}\left\{3(|s|^2 - |t|^2) \pm \sqrt{9 - 4|s|^2|t|^2}\right\}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 3, 3, 5 となる。

定理 9. $(G_2/\mathrm{SO}(4), \mathbf{R}^7)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{|s||t|}\left\{(|s|^2 - |t|^2) \pm \sqrt{1 - |s|^2|t|^2}\right\}, \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 2, 2, 1, 2 となる。

例外的な3つの場合には、さらに関数を定義することによって、$\mathbf{R}^k$ 値等径関数を構成できる（k はそれぞれの余等質次元を表す）。なお、これらの場合、主軌道は等焦点部分多様体ではない。

補題 10. エルミート対称空間 $(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n})$ の場合、$H = \mathrm{Sp}(n-1)$ なので、その中心化群は $\mathrm{Sp}(1)$ となる。このとき、$\mathrm{Sp}(1)$ 作用に対する運動量写像 $\mu : \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n) \to \mathfrak{sp}(1)$ が等径関数となる。

これらの場合にも、$H \subset \tilde{H} \subset G$ なる部分群が存在し、$\tilde{H}$ の G/K への作用が余等質次元1となる。この作用に対しても等径関数 $\tilde{f}$ を構成できる。この $\tilde{f}$ と $\tilde{H}$ の出現は偶然ではなく、W と関連した表現、ベクトル束とその切断を使って代数的、幾何学的に説明される。

例. $(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n})$ の場合、$\tilde{H} = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$ となり、対応する等径関数 $\tilde{f}$ は $|\mu|^2 : \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n) \to \mathbf{R}$ である。

最後に二つのファイブレーション $\pi_1 : G \to H\backslash G$, $\pi_2 : G \to G/K$ を利用して、**ラドン変換**を以下のように定義する。すなわち、$f \in C^\infty(G/K)$ に対して、$R(f) \in C^\infty(H\backslash G)$ を H の正規化された Haar 測度 $d\mu$ を利用して、

$$R(f)(x) = \int_{\pi_1^{-1}(\{x\})} \pi_2^* f d\mu$$

と定義する。

定理 11. *H の G/K への作用が余等質次元1の場合には、$|s|^2$ のラドン変換は単位球面 $S^{N-1} \subset W$ 上の主曲率が2種類の等径関数となる。*

定理 12. *$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ $(n \geqq 3)$ 上の等径関数 $\tilde{f}$ のラドン変換は、野水 [3] により定義された $\mathbf{C}^n$ 内の単位球面 S^{2n-1} 上の等径関数となる。対応する等径超曲面は4種類の主曲率を持つ。*

定理 13. *$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ 上の等径関数 $|\mu|^2 : \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n) \to \mathbf{R}$ のラドン変換は単位球面 $S^{4n-1} \subset \mathbf{C}^{2n}$ 上の主曲率が4種類の等径関数となる。*

定理 14. *$Gr_4(\mathbf{R}^9)$ 上の等径関数 $\tilde{f}$ のラドン変換は、スピン表現 S_9 内の単位球面 S^{15} 上の主曲率が4種類の等径関数となる。対応する等径超曲面は等質ではない（尾関 - 竹内の例 [4]）。*

References

[1] Y.Nagatomo, *Twistor sections on the Wolf spaces*, Trans. A.M.S, **360**, (2008), 4497-4517

[2] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, a preprint

[3] K.Nomizu, *Some Results in E.Cartan's Theory of Isoparametric Families of Hypersurfaces*, Bull.A.M.S. **79** (1973), 1184–1188

[4] H.Ozeki and M.Takeuchi, *On some types isoparametric hypersurfaces in spheres. I*, Tôhoku Math.J. **27** (1975), 515-559

819-0395 福岡市西区元岡 744

E-mail address: nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp