

可展的なメビウスの帯の漸近的完備化上に現れる特異点について

直川耕祐 (大阪大学大学院理学研究科 D1)

3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 における可展的な Möbius の帯の漸近方向への延長上に現れる, カスプ辺以外の特異点の個数の下からの評価について報告する.

まず, 用語を定義する. C^∞ -写像 $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, $\gamma'(s) := d\gamma(s)/ds$ が \mathbb{R} 上消えないとき, 正則曲線という. 正則曲線 $\gamma(s)$ は, $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma(s+l) = \gamma(s)$ を満たすとき, l -周期的であるという. 以下, このような γ を固定する. $\xi = \xi(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を γ に沿う C^∞ -ベクトル場であって, 各 $s \in \mathbb{R}$ において $\gamma'(s)$ と一次独立なものとする. $\xi(s)$ は, $s \in \mathbb{R}$ において $\xi(s+l) = -\xi(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) を満たすとき, l -奇周期的であるという. 以下, このような ξ を固定する. 十分小さく $\epsilon > 0$ をとると, C^∞ -写像

$$(1) \quad F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

は \mathbb{R}^3 へのはめ込みを与える. この F のことを, γ を生成曲線とし, ξ を漸近方向とする Möbius の帯という. もし F が平坦 (つまり Gauss 曲率が常に 0) であるならば, F は可展的であるという. (1) で定義された F に対して, C^∞ -写像

$$\tilde{F}(s, u) := \gamma(s) + u\xi(s) \quad (s, u \in \mathbb{R})$$

を F の漸近的完備化という. 図 1 の Möbius の帯の漸近的完備化は, 図 2 のようになる.

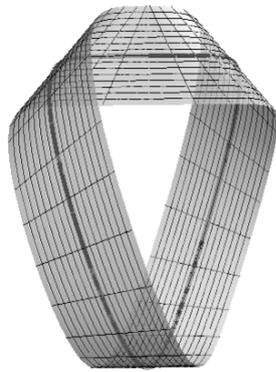


図 1 $F(s, u)$ の像

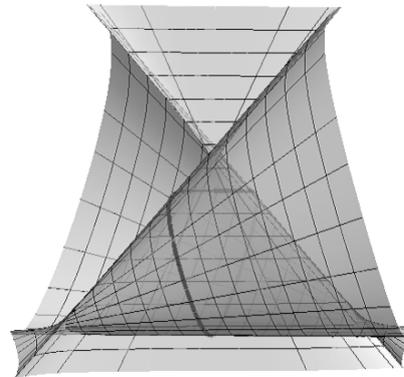


図 2 $F(s, u)$ の漸近的完備化

U を \mathbb{R}^2 の領域とし, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ -写像とする. 点 $p \in U$ が f の特異点であるとは, p において f の Jacobi 行列が退化するときという. 3つの C^∞ -写像

$$f_C(u, v) := \begin{pmatrix} 2u^3 \\ -3u^2 \\ v \end{pmatrix}, \quad f_S(u, v) := \begin{pmatrix} 3u^4 + u^2v \\ -4u^3 - 2uv \\ v \end{pmatrix}, \quad f_{CR}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv^3 \end{pmatrix}$$

は, すべて原点において特異点をもつ (図 3, 4, 5). f の特異点 p がカスプ辺であるとは, p のまわりの座標変換と, $f(p)$ のまわりの \mathbb{R}^3 の座標変換によって, f が f_C と一致するときという. 同

様に，このような座標変換で f が f_S と一致するとき燕の尾といい， f_{CR} と一致するときカスプ状交叉帽子という．可展面に現れる一般的な特異点は，カスプ辺，燕の尾，カスプ状交叉帽子の3つである．この中で最も一般的に現れる特異点は，カスプ辺である (cf. [6, Proposition 2.16]) ．

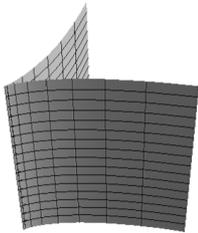


図3 カスプ辺

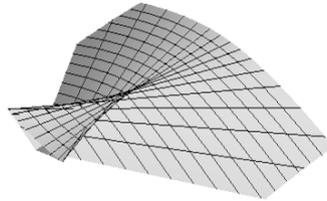


図4 燕の尾

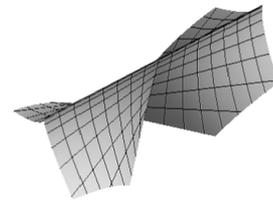


図5 カスプ状交叉帽子

國分-Rossmann-佐治-梅原-山田 [4] によるカスプ辺・燕の尾の便利な判定法を紹介する．これを述べるために，いくつかの定義を準備する．

定義 1. C^∞ -写像 $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が波面またはフロントであるとは，次の (1) と (2) を満たす C^∞ -写像 $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ (\mathbb{S}^2 は 2 次元単位球面) が存在するときをいう．

- (1) 各 $p \in U$ に対して $\nu(p)$ が $df(T_p U)$ に直交する．ただし， df は f の微分であり， $T_p U$ は p における U の接空間である．
- (2) 写像 $L := (f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ が C^∞ -はめ込みである．

この ν を f の単位法線ベクトル場という．一方，(1) を満たす ((2) を必ずしも満たさない) ν が存在するとき， f をフロントルという．

また，論文 [4] に従い，次のように定義する． C^∞ -写像 $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする． f の特異点 p が非退化であるとは， $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$ の微分 $d\lambda = \lambda_u du + \lambda_v dv$ が p で 0 とならないときにいう．ただし， $f_u := \partial f / \partial u$ ， $f_v := \partial f / \partial v$ である．非退化な特異点 p の近傍で， f の特異点集合 $S(f)$ は正則曲線となる．この正則曲線 $c(s)$ を f の特異曲線という．特異曲線の接ベクトルを f の特異方向という．さらに，非退化な特異点 p の近傍では， $df(\eta) = 0$ となる 0 でない接ベクトル $\eta \in T_{c(s)}U$ がとれる．この η は，定数倍を除いて一意に定まり， f の退化方向という．退化方向 $\eta(s)$ は特異曲線 $c(s)$ に沿って滑らかに取れる．

事実 2. ([4]) $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする． $c(s)$ を非退化な特異点 p の近傍における f の特異曲線とし， $c(0) = p$ とする． $\eta(s)$ を $c(s)$ に沿って f の退化方向を与える C^∞ -ベクトル場とする．また， $\rho(s) := \det(c'(s), \eta(s))$ とおく．このとき，

- (1) $p = c(0)$ がカスプ辺であるための必要十分条件は， $\rho(0) \neq 0$ である．
- (2) $p = c(0)$ が燕の尾であるための必要十分条件は， $\rho(0) = 0$ かつ $\rho'(0) \neq 0$ である．

可展的な Möbius の帯は，豊富に存在している．実際，Chicone と Kalton [1] は，ジェネリック

に与えられた正則な空間閉曲線に対し、これを生成曲線とするような可展的な Möbius が存在することを示した。また、Røgen [8] は、任意の「位相型」の可展的な Möbius の帯が構成できることを示した。ただし、Möbius の帯の位相型とは、生成曲線のイソトピー型と「捻り数」で決定されるものである。一方、完備かつ平坦な \mathbb{R}^3 にはめ込まれた曲面は、柱面に限ることが知られている。この事実から、可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には、必ず特異点が現れる。そこで、カスプ辺以外の特異点がどの程度現れるのか、その個数の下限について調べ、次のような結果を得た。

命題. 可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には、カスプ辺以外の特異点が少なくとも 1 つ存在する。

さらに、カスプ辺以外の特異点がちょうど 1 個である例が存在する (図 6)。

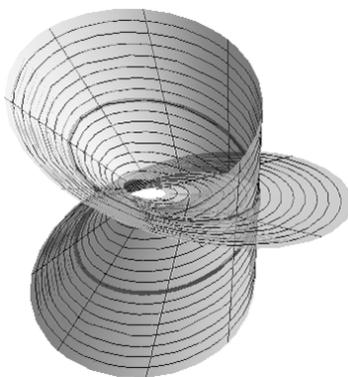


図 6 漸近的完備化上にカスプ辺以外の特異点を 1 つだけもつ例

閉測地線を含む可展的な Möbius の帯は『帯状の長方形の「紙」の両端をつなげて作れる』という点で、重要である。例えば、図 1 の生成曲線は測地線となっているのだが、図の上部真ん中を生成曲線に対して垂直にハサミで切り、平面に展開すると、帯状の長方形となっている。

閉測地線を含む可展的な Möbius の帯の例は、Wunderlich [9] が初めて構成した。最近、黒野と梅原 [5] は、任意の位相型に対してこのような Möbius の帯が存在することを示した。したがって、閉測地線を含む可展的な Möbius の帯も豊富に存在していることが分かる。そこで、この漸近的完備化上に現れるカスプ辺でない特異点の個数の下からの評価を行い、次のような結果を得た。

定理. 閉測地線を含む可展的な Möbius の帯の漸近的完備化上には、カスプ辺以外の特異点が 3 つ以上存在する。

さらに、カスプ辺以外の特異点がちょうど 3 つの例が存在する (図 1, 2)。命題と定理の証明には、ともに [4] におけるカスプ辺の判定法を用いた。

定理の証明の概要. 次のような手順で定理を証明する。

- (1) $F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ を可展的な Möbius の帯とし、その生成曲線 γ は閉測地線であるとする。 $e(s)$ を γ の単位接ベクトルとする。 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が 0 でない点において、 $\gamma(s)$

の主法線ベクトル $n(s)$, 従法線ベクトル $b(s)$, 撓率関数 $\tau(s)$ が存在する. 漸近方向 $\xi(s)$ は「展直平面」への射影が単位ベクトルとなるように正規化しておく, ただし, 展直平面とは生成曲線の接ベクトルに直交する平面のことをいう. すると, $\xi(s)$ は, $e(s), n(s), b(s)$ の一次結合として

$$D := \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}e(s) + b(s) \quad (\kappa(s) \neq 0)$$

と表せる. これを正規化された Darboux ベクトル場という (cf. [5]). ただし, D は, 曲率関数の零点では定義されない. また, 曲率関数の零点を越えると, ベクトルの向きが逆になる場合があることに注意せよ. $\sigma(s) := \tau(s)/\kappa(s)$ のことを γ の円錐的曲率 (conical curvature) という. 円錐的曲率も曲率関数の零点では定義されない.

- (2) 正規化された Darboux ベクトル場 D は $\kappa(s)$ の零点で定義されないため, ξ として D とは別の表示を与える. そのために, まず $n, b, \kappa, \tau, \sigma$ の滑らかな拡張を次で定義する. すなわち

$$\hat{n} := -e \times \xi, \quad \hat{b} := e \times \hat{n}, \quad \hat{\kappa} := e' \cdot \hat{n}, \quad \hat{\tau} := -\hat{b}' \cdot \hat{n}, \quad \hat{\sigma} := e \cdot \xi$$

とおく. このとき, $\hat{n}, \hat{b}, \hat{\kappa}, \hat{\tau}, \hat{\sigma}$ は \mathbb{R} 上で C^∞ 級である. κ の零点でない点において, $\hat{n}, \hat{b}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}$ は, 符号の違いを除いてそれぞれ n, b, κ, σ と一致している. すなわち, $\hat{\kappa}(s) = \pm\kappa(s)$, $\hat{n}(s) = \pm n(s)$, $\hat{b}(s) = \pm b(s)$, $\hat{\sigma}(s) = \pm\sigma(s)$ である. $\hat{\tau}(s)$ は, $\kappa(s) \neq 0$ のとき, (符号の違いなく) $\tau(s)$ と等しい. これらの記号を用いると,

$$\xi = \hat{\sigma}e + \hat{b}$$

と書ける.

- (3) \hat{n} は F の単位法線ベクトル場を与えているため, F はフロントルである. F の特異点はすべて非退化であり, 特異点集合は,

$$S(F) := \left\{ (s, u) \in \mathbb{R}^2; u = -\frac{|\gamma'(s)|}{\hat{\sigma}'(s)}, \hat{\sigma}'(s) \neq 0 \right\}$$

で与えられる. F の退化方向は $\partial/\partial s$ である. そこで, 事実 2 を用いると, $S(F)$ の各連結成分上には, 少なくとも 1 つカスプ辺でない特異点が存在する. 一方, (1 周期あたりの) 特異点集合 $S(F)$ の連結成分の個数は, 有限ならば, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しい. ゆえに, F のカスプ辺でない特異点の個数は, $\hat{\sigma}'(s)$ の零点の個数に等しいか, または大きい.

- (4) $e = e(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ を球面曲線と見なすとき, 円錐的曲率 $\sigma(s)$ は, 球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率と一致することが知られている (cf. [2]). $\kappa(s)$ の零点で球面曲線 $e(s)$ は特異点となるが, $\sigma(s)$ の拡張 $\hat{\sigma}(s)$ が \mathbb{R} 上で C^∞ 級なので, $e(s)$ の測地的曲率円も κ の零点を含めて \mathbb{R} 上で滑らかに定義できる.
- (5) $\hat{\sigma}'(s)$ の零点が 1 つしかないと仮定し, 矛盾を導く. ここでは説明を簡単にするために, $\kappa(s)$ の零点は有限個とする. 今, $\xi(s)$ が l -奇周期的であったとすると, $\hat{\sigma}(s)$ も l -奇周期的である. よって, $\hat{\sigma}(s)$ は閉区間 $[0, l]$ 上で (狭義の) 単調関数であるとしてよい. すると, $[0, l]$ 上で球面曲線 $e(s)$ の測地的曲率円の拡張の族は, 渦巻き線の曲率円の族と同様の「入れ子構造」を

もつ。つまり，各測地的曲率円の拡張は，他のどの測地的曲率円の拡張とも共通部分を持たない（渦巻き線の曲率円の入れ子構造については，[3] または [7] を見よ）。特に，球面曲線 $e(s)$ が閉じず，矛盾が生じる。よって， $\hat{\sigma}'(s)$ の零点は2つ以上となるが，2つの場合は $\hat{\sigma}(s)$ の奇周期性から，同様の議論によって矛盾が生じる。したがって， $\hat{\sigma}'(s)$ の零点は3つ以上である。(3) により，定理が示された。

参考文献

- [1] C. Chicone and N. J. Kalton, *Flat embeddings of the Möbius strip in \mathbb{R}^3* , Commun. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 31–50.
- [2] E. Heil, *A four-vertex theorem for space curves*, Math. Pannon. **10** (1999), 123–132.
- [3] A. Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie*, Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber 1912, 170–180.
- [4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [5] Y. Kurono and M. Umehara, *Flat Möbius strips of given isotopy type in R^3 whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.
- [6] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Diff. Geom. **82** (2009), 279–316.
- [7] U. Pinkall, *On the four-vertex theorem*, Aequationes Math. **34** (1987), 221–230.
- [8] P. Røgen, *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.
- [9] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. **66** (1962), 276–289.