# 低次元 solsoliton と対応する部分多様体の性質*

橋永貴弘† (広島大学大学院理学研究科 D1)

**概 要**

リー群上の左不変計量と, ある非コンパクト対称空間内の等質部分多様体が対応することが知られている. 本稿では, 低次元単連結可解 (冪零) リー群上の solsoliton (nilsoliton) に対応する等質部分多様体の極小性に関して得られた結果を紹介する. 具体的に述べれば, 3 次元単連結可解リー群および 4 次元単連結冪零リー群の場合には, その上の左不変計量が solsoliton (nilsoliton) であることと, 対応する等質部分多様体が極小であることは同値となる. 一方, 4 次元単連結可解リー群の場合には, solsoliton と極小部分多様体が対応しない例があることがわかった. 尚, 本稿の内容の一部は広島大学の田丸博士氏との共同研究で得られたものである.

## 1 導入

リー群上の左不変計量は, Einstein 計量や Ricci soliton などの興味深いリーマン計量の具体例を供給している. このことから, 与えられたリー群がこれらのような "良い" 左不変計量を許容するかどうかを調べることは, 重要な問題であろう. しかし, 一般に, 与えられたリー群が "良い" 左不変計量を許容するかどうかを判定することは, リー群の次元が少し高くなっただけでも困難である. 我々は上記の問題に対して, 非コンパクト対称空間内の等質部分多様体論からのアプローチを試みている.

まずはじめに, リー群上の左不変計量と等質部分多様体の間の対応について述べる. $G$ を $n$ 次元リー群とし, $\mathfrak{g}$ を $G$ のリー代数とする. $G$ 上の左不変計量全体のなす空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}$ とすると, $G$ 上の左不変計量は $\mathfrak{g}$ 上の内積と 1 対 1 に対応していることから

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積 }\} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$$

と表される. この $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 上にスカラー倍を除いて等長的という同値関係を与える.

**定義 1.1.** リー代数 $\mathfrak{g}$ とその上の内積 $\langle,\rangle$ の組 $(\mathfrak{g},\langle,\rangle)$ を **内積付きリー代数** と呼ぶ. 2 つの内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}_1,\langle,\rangle_1)$ と $(\mathfrak{g}_2,\langle,\rangle_2)$ が **スカラー倍を除いて等長的** であるとは, リー代数同型写像 $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ と $c > 0$ が存在して, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ に対して $\langle X,Y\rangle_1 = c\langle \varphi X, \varphi Y\rangle_2$ を満たすときをいう.

スカラー倍を除いて等長的という同値関係による同値類を $[\cdot]$ で表す. また, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の自己同型群, $\mathbb{R}^\times$ を $\mathfrak{g}$ 上の 0 でないスカラー写像のなす群とする. このとき次が知られている:

---

*部分多様体論・湯沢 2011 (於 湯沢グランドホテル, 11 月 24 日〜26 日) 報告集用原稿.

†E-mail : hashinaga@hiroshima-u.ac.jp, 学振 DC1.

**命題 1.2** ([3])**.** リー代数 $\mathfrak{g}$ を $n$ 次元とする．このとき, $\mathfrak{g}$ 上の各内積 $\langle , \rangle$ の同値類 $[\langle , \rangle]$ は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ 内の等質部分多様体 ($\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$–軌道) となる:

$$[\langle , \rangle] = \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n).$$

命題 1.2 から, 次の対応は, リー群上の左不変計量 (リー代数上の内積) と非コンパクト対称空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ 内の $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 等質部分多様体の間の対応である:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \\ \Cup & & \cup \\ \langle , \rangle & \longleftrightarrow & [\langle , \rangle] = \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle \end{array}$$

Einstein 計量や Ricci soliton のような計量のリーマン幾何的な性質は, スカラー倍を除いて等長的で保たれることから, 対応する部分多様体の性質と思うことができる．このことから, 上記の対応の下で次の問題は自然である:

**問題 1.3.** “良い” 左不変計量に対応する等質部分多様体は “良い” 部分多様体か？

仮に “良い” 左不変計量を, 対応する等質部分多様体の性質で特徴づけることができれば, 与えられたリー群が “良い” 左不変計量を許容するかどうかという問題は, 対応する等質部分多様体を調べることで判定できることになる．また, この対応は, リーマン幾何学と部分多様体論とを結びつけるものになるので, 興味深いと思われる．

## 2 solsoliton および nilsoliton について

**定義 2.1.** 単連結可解リー群 $G$ 上の左不変計量 $g$ が **solsoliton** であるとは, 対応するリー代数上の内積 $\langle , \rangle$ の Ricci 作用素 $\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle}$ が次を満たすときをいう: ある $c \in \mathbb{R}$ と, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して

$$\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = cI + D. \tag{1}$$

ただし $I$ は恒等写像, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の微分代数である．特に単連結冪零リー群上の左不変計量 $g$ に対応するリー代数上の内積 $\langle , \rangle$ が (1) を満たすときに, $g$ を **nilsoliton** という．

Einstein 計量は, $D = 0$ を満たす自明な solsoliton である．solsoliton および nilsoliton は Lauret により深く研究されている ([4], [7] など)．また, 低次元の場合, 単連結可解リー群上の solsoliton および単連結冪零リー群上の nilsoliton の分類が知られている ([7], [8])．特に 6 次元以下のすべての単連結冪零リー群は nilsoliton を許容することが知られている．

**定義 2.2.** $G$ 上の左不変計量 $g$ が **Ricci soliton** であるとは, $g$ の Ricci テンソル $\mathrm{ric}_g$ が次を満たすときをいう: ある $c \in \mathbb{R}$ と $X \in \mathfrak{X}(G)$ が存在して,

$$\mathrm{ric}_g = cg + \mathrm{L}_X g.$$

ここで $\mathfrak{X}(G)$ は $G$ 上の完備なベクトル場のなす空間, $\mathrm{L}_X$ は $X$ によるリー微分である．

**命題 2.3** ([7])**.** 単連結可解リー群 $G$ 上の左不変計量 $g$ は, solsoliton ならば Ricci soliton である．また, $G$ 上の solsoliton (nilsoliton) はスカラー倍および等長的を除くとを高々 1 つである．

## 3　対応する部分多様体について

ここでは低次元単連結可解 (冪零) リー群上の solsoliton (nilsoliton) と, それらに対応する等質部分多様体の極小性との関係について紹介する.

### 3.1　3 次元の場合

3 次元単連結可解リー群の場合, 左不変計量が solsoliton (nilsoliton) であることと, 対応する等質部分多様体が極小であることが同値である.

**定理 3.1.** $G$ を 3 次元単連結可解リー群とする. このとき, $G$ 上の左不変計量 が solsoliton であることと, 次が同値: 対応する部分多様体 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle,\rangle$ が, 自然な $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$-不変な計量に関して $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ 内の極小部分多様体である.

各 3 次元可解リー代数に対して, その上のすべての内積に対応する部分多様体を調べることで定理 3.1 を証明した. 全ての 3 次元可解 (冪零) リー代数は以下のいずれかと同型であることが知られている.

| Name | Nonzero commutation relations | |
|---|---|---|
| $\mathfrak{h}_3$ | $[e_2, e_3] = e_1$ | Nilpotent |
| $\tau_3$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + e_3$ | Solvable |
| $\tau_{3,\lambda}$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = \lambda e_3 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$ | Solvable |
| $\tau'_{3,\lambda}$ | $[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3,\ [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3 \quad (\lambda > 0)$ | Solvable |

上表の各リー代数に対して, solsoliton (nilsoliton) の存在・非存在, および対応する $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 等質部分多様体 (以下軌道と記す) について補足する.

- $\mathfrak{h}_3$ および $\tau_{3,1}$ をリー代数にもつ単連結リー群上の左不変計量はスカラー倍および等長的を除くとただ 1 つである ([6]). それらはそれぞれ nilsoliton および Einstein (自明な solsoliton ) であり, 対応する軌道はどちらも $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ 全体である.
- $\tau_3$ をリー代数に持つ単連結可解リー群は, solsoliton を許容しない. 対応する軌道はすべて合同であり, かつそれらは極小でない.
- $\tau_{3,\lambda}(\lambda \neq 1)$ をリー代数に持つ単連結可解リー群は, solsoliton を許容する. 対応する軌道は, すべて超曲面であり, かつ solsoliton に対応する軌道のみ極小である.
- $\tau'_{3,\lambda}$ をリー代数に持つ単連結可解リー群は, Einstein 計量を許容する. 対応する軌道は, Einstein 計量に対応する軌道のみ特異 (余次元 2 ) かつ極小な軌道である (その他の軌道は超曲面).

我々は Milnor-type theorem ([2]) を用いて, 3 次元単連結可解リー群上の solsoliton を分類している ([1]). 尚, この分類結果は Lauret ([7]) によりすでに得られていたが, 我々の手法はより直接的である.

### 3.2　4 次元の場合

3 次元の場合と同様のこと, つまり solsoliton (nilsoliton) と極小部分多様体が対応することが, 4 次元の場合にも成り立つかどうかを確かめた. 結果として, 冪零の場合は 3 次元のときと同様の結果が得られた. 可解の場合は solsoliton と極小部分多様体が対応しない例があることがわかった. 以下 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})/\mathrm{O}(4)$ の計量は自然な $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$-不変な計量を考えることとする.

**命題 3.2** ([7], [8])**.** solsoliton (nilsoliton) を許容する 4 次元単連結可解 (冪零) リー群のリー代数は, 以下のいずれかと同型である:

| Name | Nonzero commutation relations | |
|---|---|---|
| $\mathfrak{n}_4$ | $[e_0, e_1] = e_2,\ [e_0, e_2] = e_3$ | Nilpotent |
| $\tau_{4,\mu,\lambda}$ | $[e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = \mu e_2,\ [e_0, e_3] = \lambda e_3$<br>$(-1 < \mu \leq \lambda)$ or $(-1 = \mu \leq \lambda < 0)$ | Solvable |
| $\tau'_{4,\mu,\lambda}$ | $[e_0, e_1] = \mu e_1,\ [e_0, e_2] = \lambda e_2 - e_3,\ [e_0, e_3] = e_2 + \lambda e_3$<br>$(0 < \mu)$ | Solvable |
| $\mathfrak{s}_4$ | $[e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = -e_2,\ [e_1, e_2] = e_3$ | Solvable |
| $\mathfrak{s}_{4,\lambda}$ | $[e_0, e_1] = \lambda e_1,\ [e_0, e_2] = (1-\lambda) e_2,\ [e_0, e_3] = e_3,$<br>$[e_1, e_2] = e_3 \quad (\frac{1}{2} \leq \lambda)$ | Solvable |
| $\mathfrak{s}'_{4,\lambda}$ | $[e_0, e_1] = \lambda e_1 - e_2,\ [e_0, e_2] = e_1 + \lambda e_2,\ [e_0, e_3] = 2\lambda e_3,$<br>$[e_1, e_2] = e_3 \quad (0 < \lambda)$ | Solvable |
| $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$ | $[e_1, e_2] = e_3$ | Nilpotent |
| $\mathbb{R} \times \tau_{3,\lambda}$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = \lambda e_3 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$ | Solvable |
| $\mathbb{R} \times \tau'_{3,\lambda}$ | $[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3,\ [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3 \quad (\lambda > 0)$ | Solvable |
| $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$ | $[e_0, e_1] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_3$ | Solvable |

命題 3.2 の表の 2 つの冪零リー代数に対して, その上のすべての内積に対応する軌道を調べることで次を得た:

**定理 3.3.** $G$ を 4 次元単連結冪零リー群とする. このとき, $G$ 上の左不変計量が nilsoliton であることと, 次が同値: 対応する部分多様体 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ が, $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})/\mathrm{O}(4)$ 内の極小部分多様体である.

すべての 4 次元単連結冪零リー群は nilsoliton を許容することが知られている. また, 対応する軌道に関しては以下の通りである:

- $\mathfrak{n}_4$ の場合. 対応する軌道はすべて余次元 2 の軌道であり, nilsoliton に対応する軌道のみ極小である.
- $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$ の場合. nilsoliton に対応する軌道は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})/\mathrm{O}(4)$ 全体である.

命題 3.2 の solsoliton の分類結果を用いてすべての solsoliton に対応する等質部分多様体を調べた結果, 以下の結果を得た:

**定理 3.4.** $G$ を 4 次元単連結可解リー群とする.

1. $\mathfrak{g}$ が次のいずれかと同型とする．このとき solsoliton に対応する等質部分多様体は極小部分多様体である:

$$\tau_{4,\mu,\lambda},\ \tau'_{4,\mu,\lambda},\ \mathbb{R}\times\tau_{3,\lambda},\ \mathbb{R}\times\tau'_{3,\lambda},\ \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}.$$

2. $\mathfrak{g}$ が次のいずれかと同型とする．このとき solsoliton に対応する等質部分多様体は極小部分多様体ではない:

$$\mathfrak{s}_4,\ \mathfrak{s}_{4,\lambda},\ \mathfrak{s}'_{4,\lambda}.$$

## 参考文献


[1] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solsolitons and minimality of the corresponding submanifolds, in preparation.

[2] Hashinaga, T., Tamaru, H., and Terada, K.: Milnor-type theorem for left-invariant metrics on Lie groups — some higher dimensional examples, in preparation.

[3] Kodama, H., Takahara, A., and Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math* **135** (2011), no. 1–2, 229–243.

[4] Lauret, J.: Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), no. 4, 715–733.

[5] Lauret, J.: Finding Einstein solvmanifolds by a variational method, *Math. Z.* **241** (2002), no. 1, 83–99.

[6] Lauret, J.: Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), no. 2, 177–194.

[7] Lauret, J.: Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011), 1–21.

[8] Will, C.: Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7, *Differential Geom. Appl.* **19** (2003), no. 3, 307–318.

[9] Will, C.: The space of solvsolitons in low dimensions, *Ann. Global Anal. Geom.* **40** (2011), no. 3, 291–309.