空間型の外的平坦曲面と
向き付けられた測地線の空間の幾何構造

本田　淳史*†

東京工業大学大学院理工学研究科

概要

O'Neill-Stiel の定理により，3 次元球面内の完備な外的平坦曲面 (ガウス・クロネッカー曲率が常に消える曲面) は全測地的なものに限ることが知られているが，ある種の特異点を許容すると非自明な例が数多く存在する．本講演では，それらの分類結果を紹介する．分類の応用として，双対性と焦面に関する結果も述べる．

1　背景

3 次元双曲空間 H^3 の平坦曲面 (断面曲率が常に消える曲面) で完備なものはホロ球面と測地線のチューブとなり，自明なものに限ることが知られているが [21, 22]，ある種の特異点を許容した平坦曲面である平坦フロントで完備なものを考えると，非自明な例が数多く存在する．Gálvez-Martínez-Milán [2] により H^3 の平坦曲面の正則関数を用いた表示が発見され，Kokubu-Umehara-Yamada [14] によりその平坦フロントへの拡張が構成された．その結果，近年 H^3 の平坦フロントの大域的研究が盛んに行われている [8, 9, 10, 12, 13, 15].

3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平坦曲面についても，Hartman-Nirenberg の定理 [3, 16] により完備なものは柱面となり，自明なものに限ることが知られている．しかし，以下に定義されるある種の特異点を許容した平坦曲面，平坦フロントで完備なものには非自明な例が数多く存在する．C^∞-写像 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ が平坦フロントであるとは，各点 $p \in M^2$ に対し，その近傍 $U \subset M^2$ と C^∞-写像 $\nu : U \to S^2$ が存在して，$\langle df(TM), \nu\rangle = 0$，$\mathrm{rank}(d\nu) \leq 1$ かつ $(f, \nu) : U \to \boldsymbol{R}^3 \times S^2$ がはめ込みであるものをいう．さらに，平坦フロント $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ が完備であるとは，M^2 上のコンパクトな台を持つ 2 階の対称共変テンソル T が存在し，$ds^2 + T$ が M^2 上の完備な計量となるときをいう．このような完備平坦フロントは完備平坦曲面の一般化であり，非自明な例が数多く存在する．Murata-Umehara [17] はそれらを研究し，次の結果を得た．

事実 1.1 ([17]). 完備平坦フロント $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ は，特異点集合が空でないならば臍点を持たず，

---

* 10d00059@math.titech.ac.jp

† 本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:23・9534) の助成を受けたものである．

向き付け可能であり余向き付け可能である．それらは変曲点を持たない正則閉曲線 $\hat{\xi} : S^1 \to S^2$ と S^1 上の 1 次微分形式 α で

$$\int_{S^1} \hat{\xi}\alpha = 0$$

を満たすものと対応する．さらに，f の全てのエンドが埋め込みであるならば，f のカスプ辺でない特異点は少なくとも 4 つ存在する．

ここで，$\boldsymbol{R}^3$ の平坦曲面は外的平坦曲面 (Gauss-Kronecker 曲率が常に消える曲面) とも考えられ，上記の $\boldsymbol{R}^3$ の平坦フロントのような理論が他の空間型の外的平坦曲面についても移植されることが期待される．H^3 の完備な外的平坦曲面には非自明な例が数多く存在する [18, 1, 5]，しかし，O'Neill-Stiel[19] の定理から球面 S^3 の外的平坦曲面は完備ならば全測地的となり，自明なものに限る．そこで，S^3 の外的平坦フロントを考えると，完備，より強く閉である非自明なものが数多く存在する．本講演では，そのような S^3 の外的平坦閉フロントを研究した結果を紹介する．

2　主結果

本節では，主結果を理解するために必要な S^3 の外的平坦フロントの定義や，関連する対象を紹介する．3 次元球面 S^3 を特殊ユニタリ群 SU(2) と同一視する：

$$S^3 = \mathrm{SU}(2) = \{X \in \boldsymbol{H}\, ;\, \det X = 1\} \qquad \left(\text{ただし } \boldsymbol{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} ; z, w \in \boldsymbol{C} \right\}\right).$$

ここで $\boldsymbol{H}$ は四元数体と同型である．また，$\boldsymbol{H}$ に内積 $\langle A, B\rangle := \mathrm{trace}(AB^{-1})/2$ (ただし $A, B \in \boldsymbol{H}$) を与えるとき，4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ と等長的である．単位接ベクトル束

$$T_1S^3 = \left\{(p, v) \in S^3 \times S^3\, ;\, \langle p, v\rangle = 0\right\} \subset \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$$

は標準的接触形式 (Liouville 形式) Θ を持つ．S^3 への自然な射影を π とするとき，S^3 のフロントは次のように定義される．

定義 2.1 (フロント). 2 次元多様体 M^2 から S^3 への C^∞-写像 $f : M^2 \to S^3$ が**フロント** (front) であるとは，各点 $p \in M^2$ に対し，その近傍 $U \subset M^2$ と Legendre はめ込み $L : U \to T_1S^3$ が存在して，$\pi \circ L = f$ となるときをいう．

曲面，つまり M^2 から S^3 へのはめ込みは，その (局所的に定義される) 単位法線ベクトル場 ν を用いて定まる写像 $L = (f, \nu)$ が Legendre はめ込みを与えるので，フロントである．また，特異点 (すなわち $\mathrm{rank}(df)_p \leq 1$ となる点 $p \in M^2$) をもつ場合にもフロントとなる例が存在するので，フロントははめ込まれた曲面よりも広いクラスである．

フロント $f : M^2 \to S^3$ の Legendre リフト $L = (f, \nu)$ の第 2 成分として定まる S^3 への写像 ν を単位法線ベクトル場という．また，$p \in M^2$ がフロント f の**臍点**であるとは，$\mathrm{rank}(d\nu)_p = 0$ となるときをいう．フロントにおける外的平坦性を次のようにして定義する．

定義 2.2 (外的平坦フロント). フロント $f : M^2 \to S^3$ が**外的平坦** (extrinsically flat) であるとは，その単位法線ベクトル場 ν が常に退化しているときをいう．

S^3 の大円の運動の軌跡として得られるフロントを**線織的** であるといい，線織的な外的平坦フロントを**可展的**という．

外的平坦フロント $f : M^2 \to S^3$ が閉であるとは，M^2 が境界のないコンパクト 2 次元多様体であるときをいう．主定理はそれらの分類を与える．

主定理. 全測地的でない S^3 の外的平坦閉フロントは，S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ で

$$\kappa_1(s) > -\kappa_2(s), \qquad s \text{ は弧長パラメータ}, \qquad \text{長さが有理比} \tag{2.1}$$

を満たすものと 1 対 1 に対応する (ただし各 $k = 1, 2$ に対し，κ_k は γ_k の測地的曲率).

この対応は，以下のように具体的に表される．北極からの立体射影 π_N により，S^2 をリーマン球面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ と同一視する．このとき，条件 (2.1) を満たす S^2 の閉曲線のペア $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ に対し，$\mu_k(s) = \pi_N(\gamma_k(s))$ とし

$$M_k(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu_k|^2}} \begin{bmatrix} 1 & \mu_k(s) \\ -\bar{\mu}_k(s) & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(t) := \begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{bmatrix}$$

$(k = 1, 2)$ とするとき，写像

$$f(s, t) = M_1(s)\, \sigma(t)\, M_2(s)^{-1} \in \mathrm{SU}(2) = S^3 \tag{2.2}$$

は外的平坦閉フロントを与える．逆に，すべての外的平坦閉フロントはこのようにして得られる．

3　応用

双対性について

測地線の空間 $\mathcal{L}(S^3)$ をグラスマン多様体 $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$ と同一視するとき，$\boldsymbol{R}^4$ での直交補空間を与える写像

$$\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4) \ni \Pi \longmapsto \Pi^{\perp} \in \tilde{\mathrm{G}}\mathrm{r}_2(\boldsymbol{R}^4)$$

は，直交双対測地線を定める．これを用いて，線織面に対してその双対線織面が定義される．

この双対性に関する先行研究を紹介する．可展面のあるクラスとして，接線曲面と呼ばれるものがある．すなわち，S^3 の曲線の接線方向に測地線を伸ばしてできる線織面である．Izumiya-Nagai-Saji [7] は，S^3 の線織面や可展面に現れる特異点を研究し，その中で接線曲面の双対線織面は接線曲面であることを示している．

しかし，一般の可展面の双対線織面は可展面であるかどうかは不明である．そこで，筆者は主定理を得るために用いた手法を適用して，この問題が肯定的に解決されることを示した．すなわち，可展面の双対線織面は可展面である．また，外的平坦閉フロントで，その双対と合同なもの，すなわち自己双対外的平坦閉フロントも分類することができた．

系 1. 自己双対外的平坦閉フロントは，有理長を持つ球面卵形線と 1 対 1 に対応する．

焦面について

一般に，外的平坦フロントと平坦フロントは異なる性質を持つ．例えば，平坦フロントの平行フロントは平坦フロントであるが，外的平坦性は平行フロントをとる操作で保たれない．しかし，類似する性質として，平坦性も外的平坦性も焦面をとる操作で不変であることがわかった．ここで，焦面とはフロントの平行曲面の特異点の軌跡である．$\Sigma^3 = \boldsymbol{R}^3, S^3, H^3$ の平坦フロントに対して，その焦面は平坦フロントを与えることが知られている ($\Sigma^3 = H^3$ の場合は [20], $\Sigma^3 = \boldsymbol{R}^3$ の場合は [17], $\Sigma^3 = S^3$ の場合は [11] 参照).

Kokubu-Rossman-Umehara-Yamada [12] は H^3 の平坦フロントの焦面を研究した．その中で，焦面の逆問題，すなわち "与えられた平坦フロントに対して，それを焦面に持つような平坦フロントは存在するか" という問題を考え，それは常に解けることを示した．さらに，完備な平坦曲面であるホロ球面と測地線のチューブを焦面に持つ平坦フロントを分類した．

同様の問題を S^3 の外的平坦フロントについて考えると，焦面の逆問題には，解が存在しない場合があることがわかった．

系 2. 全測地的曲面を焦面に持つような，外的平坦フロントは存在しない．

参考文献

[1] K. Abe, H. Mori and H. Takahashi, A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **65** (1997), 31–46.

[2] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Flat surfaces in the hyperbolic 3-space, *Math. Ann.* **316** (2000), 419–435.

[3] P. Hartman and L. Nirenberg, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.

[4] T. J. Hitchin, Monopoles and Geodesics, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 579–602.

[5] A. Honda, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, to appear in Tohoku Mathematical Journal, arXiv : 1009.3994.

[6] A. Honda, Surfaces of constant Gaussian curvature-1 with singularities in the 3-Sphere, in preparation.

[7] S. Izumiya, T. Nagai and K. Saji, Great circular surfaces in the three-sphere, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409–425.

[8] Y. Kawakami, Value distribution of the hyperbolic Gauss maps for flat fronts in hyperbolic three-space, to appear in Houston Journal of Mathematics, arXiv:0908.1307.

[9] Y. Kawakami, A ramification theorem for the ratio of canonical forms of flat surfaces in hyper-

bolic three-space, preprint, arXiv:1110.3110.

[10] Y. Kawakami and D. Nakajo, Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan, arXiv:1004.1484.

[11] Y. Kitagawa and M. Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3, *Geom. Dedicata* **155** (2011), 105–140.

[12] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 265–299.

[13] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 799–852.

[14] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, An elementary proof of Small's formula for null curves in PSL(2, **C**) and an analogue for Legendrian curves in PSL(2, **C**), *Osaka J. Math.* **40** (2003), 697–715.

[15] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.* **216** (2004), 149–175.

[16] W. S. Massey, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, *Tohoku Math. J.* **14** (1962), 73–79.

[17] S. Murata and M. Umehara, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Differential Geom.* **82** (2009), 279–316.

[18] K. Nomizu, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, Math. Ann. **205** (1973), 181–192.

[19] B. O'Neill and E. Stiel, Isometric immersions of constant curvature manifolds, *Michigan. Math. J.* **10** (1963), 335–339.

[20] P. Roitman, Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics, *Tohoku Math. J.* **59** (2007) 21–37.

[21] S. Sasaki, On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Kodai Math. Sem. Rep.* **21** (1973), 449–457.

[22] Ju. A. Volkov, and S. M. Vladimirova, Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskiĭ space, *Mat. Zametki* **10** (1971), 327–332.