Construction of calibrated submanifolds

河井　公大朗　（東北大・理 D1）

概 要

calibrated submanifold の概念は 1982 年に Harvey, Lawson により導入された。これらは SYZ 予想により mirror symmetry において重要な役割を果たすと考えられている。

以下では moment map による手法を用いて、calibrated submanifold の一種である special Lagrangian submanifold を非平坦な Calabi-Yau 多様体上に構成する。

1 Calibrated geometry

Calibrated geomery は Harvey, Lawson により、次の事実の一般化として導入された。[1]

Fact 1.1. (Wirtinger inequality)
(M, J, ω) を m 次元 *Kähler* 多様体とする。このとき任意の $1 \leq k \leq m, p \in M$, 向き付けられた $2k$ 次元部分空間 $V \subset T_pM$ に対して次が成立。

$$\frac{\omega^k}{k!}|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

この不等式は $\alpha \leq 1$ が存在して $\frac{\omega^k}{k!}|_V = \alpha \cdot \mathrm{vol}_V$ となることを意味する。

一方 $N \subset M$ を k 次元複素部分多様体とすると、$\frac{\omega^k}{k!}|_V = \mathrm{vol}_V$ が成り立つ。特に N がコンパクトな場合、上の不等式よりコンパクト複素部分多様体はそのホモロジー類の中で体積を最小にすることがわかる。

Definition 1.2. (M, g) を m 次元 *Riemann* 多様体とする。また φ を M 上の k 次閉微分形式とする。*(*$1 \leq k \leq m$*)*

このとき φ が M 上の **calibration** であるとは、任意の $p \in M$, 向き付けられた k 次元部分空間 $V \subset T_pM$ に対して次が成立するときをいう。

$$\varphi|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

また向き付けられた k 次元部分多様体 $N \subset M$ に対して、N が M の **calibrated submanifold(**φ**-submanifold)** であるとは、次が成立するときをいう。

$$\varphi|_V = \mathrm{vol}_V$$

以下 φ にホロノミー群 $\mathrm{Hol}(g)$ による対称性を仮定する。すると以下のような calibrated submanifold が考えられる。

$\mathrm{Hol}(g)$ $(\subset)$	$\mathrm{U}(m)$	$\mathrm{SU}(m)$	G_2
(M,g)	Kähler	Calabi-Yau	G_2
φ	$\omega^k/k!$ (ω:Kähler form)	$\mathrm{Re}(\Omega)$ (Ω:hol. volume form)	$\varphi\in\Omega^3$ $*\varphi\in\Omega^4$ (φ:G_2-structure)
φ-submanifolds	k-dim complex submanifolds	**special Lagrangian submanifolds**	(co)associative submanifolds

特にspecial Lagrangian submanifoldは、次のようにある微分形式の制限が消えることで特徴付けられることが知られている。

Fact 1.3. (M,J,ω,Ω) を m 次元 *Calabi-Yau* 多様体とし、$L\subset M$ を実 m 次元の向きづけられた M の部分多様体とする。

このとき、L が M の *special Lagrangian submanifold* $\Leftrightarrow \omega|_L=0, \mathrm{Im}\Omega|_L=0$

この特徴づけを用いて、以下のような方法で具体的構成を考える。

2 Construction of SL submanifolds

◆ 構成の概要

コンパクトLie群 G が、$(2m+2)$ 次元Calabi-Yau多様体 (M,J,ω,Ω) にCalabi-Yau構造を保って作用しているとする。

このとき、G-軌道に横断的な曲線 $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ で次の性質をみたすものを構成する。

$$\begin{cases} \omega|_{G\cdot\gamma}=0 \\ \mathrm{Im}\Omega|_{G\cdot\gamma}=0 \end{cases}$$

この構成法はIonel, Min-Oo [2] に基づく。

◆ $\omega|_{G\cdot\gamma}=0$

moment map の存在を仮定する。

次の基本的な事実から、$\omega|_{G\cdot\gamma}=0$ となるためには $G\cdot\gamma$ は moment map の level set に入っていなければならないことがわかる。

Fact 2.1. $\mathfrak{g}^*$ を G の *Lie* 環の双対空間とし、$Z(\mathfrak{g}^*)$ を余随伴作用により保たれる $\mathfrak{g}^*$ の元全体とする*:*

$$Z(\mathfrak{g}^*):=\{\xi\in\mathfrak{g}^*|Ad^{\#}(g)\xi=\xi\ (\forall g\in G)\}.$$

また (M,ω) はシンプレクティック多様体で、コンパクト *Lie* 群 G が M に ω を保って作用しており、*moment map* $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在するとする。

このとき $L \subset M$ を任意の連結な G 不変 *Lagrangian submanifold (i.e.* $\omega|_L = 0$*)* とすると、$c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ が存在して以下が成り立つ。

$$L \subset \mu^{-1}(c).$$

◆ $\underline{\mathrm{Im}\ \Omega|_{G\cdot\gamma} = 0}$

$\mu^{-1}(c)$ **内の** G **軌道の次元を実** m **次元**と仮定する。

$T(G\cdot\gamma) = T(G\text{-}orbit) \oplus \mathbb{R}\dot{\gamma}$ であるから $\{v_1, \cdots, v_m\}$ を $T(G\text{-}orbit)$ の局所的な基底とすると、$\mathrm{Im}\ \Omega|_{G\cdot\gamma} = 0$ となるためには γ に関する以下の微分方程式を解けばよい:

$$\mathrm{Im}\Omega(v_1, \cdots, v_m, \dot{\gamma}) = 0.$$

また、例えば以下のような状況では更に強いことがいえる。

Proposition 2.2. 上の状況で、M **を単連結、**G **を** m **次元 torus** T^m とする。

このとき任意の基底 $X = \{X_1, \cdots, X_m\} \subset \mathfrak{t}^m$ に対して、ある T^m 不変な滑らかな関数 $f_X \in C^\infty(M)$ が存在して次が成り立つ：

$$\mathrm{Im}\Omega(X_1^*, \cdots, X_m^*, \cdot) = df_X. \tag{2.1}$$

ここで X_i^* は $X_i \in \mathfrak{t}^m$ の生成する M 上の実ベクトル場である。

またこのとき

$$\mathrm{Im}\Omega(X_1^*, \cdots, X_m^*, \dot{\gamma}) = d(f_X \circ \gamma) = 0$$

であるから、任意の $c \in (\mathfrak{t}^m)^*$, $c' \in \mathbb{R}$ に対して

$$L_{c,c',X} := \mu^{-1}(c) \cap f_X^{-1}(c')$$

は M の T^m 不変 *special Lagrangian submanifold* となる。

Remark 2.3. これらは T^m 不変 *special Lagrangian submanifold* の中で**極大**である。

すなわち任意の連結 T^m 不変 *special Lagrangian submanifold* L は、ある $c \in (\mathfrak{t}^m)^*$, $c' \in \mathbb{R}$, 基底 $X \subset \mathfrak{t}^m$ が存在して $L \subset L_{c,c',X}$ となる。

Remark 2.4.

$$(\mu, f_X) : M \to U \overset{open}{\subset} (\mathfrak{t}^m)^* \times \mathbb{R}$$

は各ファイバーが T^m 不変 *special Lagrangian submanifold* であるような *fibration* になる。（特異ファイバーも存在する。）

この構成法を次の場合に適用し、非平坦な Calabi-Yau 多様体上の special Lagrangian submanifold を構成できる。

Theorem 2.5. *M を Einstein 定数が正である複素 m 次元 toric Kähler Einstein 多様体とする。ここで toric とは、T^m が M に Kähler 構造を保って効果的に作用している時をいう。このとき次が成り立つ。*

1. *M の標準束 K_M には Calabi-Yau 構造 $(J_{K_M}, \omega_{K_M}, \Omega_{K_M})$ が入る。*
2. *M 上の T^m 作用から、自然に K_M 上の T^m 作用が誘導される。この作用に関して moment map $\mu : M \to (\mathfrak{t}^m)^*$ が定まる。*
3. *任意の基底 $X = \{X_1, \cdots, X_m\} \subset \mathfrak{t}^m$ に対して、上記 (2.1) のような関数 f_X が存在する。*
4. *任意の実数 $A_1, \cdots, A_{m+1}$ に対して、K_M 内の極大な special Lagrangian submanifolds は次式で与えられる。*

$$\begin{cases} <\mu, X_i>= A_i & (1 \leq i \leq m) \\ f_X = A_{m+1} & \end{cases}$$

証明の概要

Proof of 1:

◆正則体積要素 Ω_{K_M} の構成

余接束上のシンプレクティック形式と同様の手法で構成する。

$\alpha \in \Omega^m(K_M)$ を tautological form とし、$\Omega_{K_M} = d\alpha \in \Omega^{m+1}(K_M)$ とする。

局所的には以下のように書ける。$(z^1, \cdots, z^m)$ を M の局所座標（および K_M 上への引き戻し）とし z を $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m$ に関するファイバー座標とする。このとき

$$\begin{aligned} \alpha &= z dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m \\ \Omega_{K_M} &= dz \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m. \end{aligned}$$

◆ Ricci 平坦計量 ω_{K_M} の構成 (**Calabi ansatz**)

$K_M - \{0$ 切断 $\}$ 上で 以下の形を仮定する。

$$\omega_{K_M} = \pi^* \omega_M + dd^c F(t)$$

$\pi : K_M \to M$ は自然射影、$F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $t = \log r$, r は 0 切断からの距離を表す。

この仮定のもと、Calabi-Yau 多様体となるための条件を課すと、この場合 F は具体的に求まる。解の形から ω_{K_M} が 0 切断上に滑らかに伸びることも確かめられる。

Proof of 2:

ω_M が Einstein 計量であることを用いると、ω_{K_M} は $K_M - \{0$ 切断 $\}$ 上で exact form であることがわかる。(Einstein 定数は 2 とした。)

$$\begin{aligned}\omega_{K_M} &= \pi^*\omega_M + dd^cF(t) \\ &= d(d^c(t+F(t)))\end{aligned}$$

これより moment map $\mu : K_M - \{0$ 切断 $\} \to (\mathfrak{t}^m)^*$ が次のように定まる。

$$<\mu, X>= d^c(t+F(t))(\tilde{X}^*)$$

これが 0 切断に伸びることも容易に確かめられる。

Proof of 3:

$\Omega_{K_M} = d\alpha$ および torus の可換性から次が成り立つ。

$$\mathrm{Im}\Omega(X_1^*, \cdots, X_m^*, \dot{\gamma}) = \pm d(\mathrm{Im}(\alpha(X_1^*, \cdots, X_m^*))).$$

$f_X = \pm\mathrm{Im}(\alpha(X_1^*, \cdots, X_m^*))$ とすればよい。

Proof of 4:章の始めに述べた構成法を適用すればよい。

Remark 2.6. (Y^7, ϕ) を G_2 多様体とする。

$*\phi \in \Omega^4(Y)$ に対応する calibrated submanifold として coassociative submanifold が考えられた。このとき Special Lagrangian submanifold 同様以下のように
ある微分形式の制限が消える ことが知られている。

$$L^4 \subset Y\text{: coassociative submanifold} \Rightarrow \phi|_L = 0$$

この類似性から、同様の手法を用いての coassociative submanifold の構成が考えられ、現在研究中である。

References

[1] R. Harvey and H. B. Lawson : Calibrated geometries, Acta Mathematica 148 (1982),47-157.

[2] M. Ionel and M. Min-Oo : Cohomogeneity one special Lagrangian 3-folds in the deformed and the resolved conifolds. Illinois J. Math. 52 (2008), no. 3, 839–865.

[3] K. Kawai : Torus invariant special Lagrangian submanifolds in the canonical bundle of toric positive Kahler Einstein manifolds. Kodai Math. J. 34 (2011), no. 3, 519–535.