与えられた関数を平均曲率にもつ回転超曲面の大域的存在

東北大学大学院理学研究科　劔持　勝衛

1　序

3 次元ユークリッド空間内の回転面は生成曲線により定まり，その平均曲率は生成曲線の 2 階の微分を含む式で書ける．よって与えられた関数を平均曲率にもつ回転面は生成曲線について 2 階の常微分方程式を解いて得られる．通常の微分方程式の解の存在定理を使えば与えられた区間 I 上の連続関数 $H(s)$ に対しそのような解は I の部分区間で存在する．ところが，$H(s)$ が一定の場合はデローネーの ”回転構成法 ”によりこの解は実数全体に一意的に拡張できる．私は論文 [4] でデローネーの定理を ”平均曲率一定 ”より緩い条件である ”周期的平均曲率 ”のもとで拡張したが，そのとき先ず次が問題となった：$H(s)$ を実数全体で定義された周期関数とする．この $H(s)$ を平均曲率にもつ回転面の周期性を問題にしたいが，そのためには生成曲線が実数全体で定義されている必要がある．2 次元の場合これは私の論文 [3] より証明できる．

論文 [4] の結果を高次元に拡張するために，先ず成すべきは表題にのべた結果を証明することである．Dorfmeister との共同研究 [1] により $H(s)$ が実解析的の場合は回転超曲面の大域的存在は証明できていた．今回は埼玉大学の長澤 壯之氏との共同研究で $H(s)$ が連続の場合を調べ同様の結果を得た．

高次元ユークリッド空間内の回転超曲面はそこに作用する直交群により 5 種類ある [2]．論文 [5] で I 型と II 型の場合について研究した．III, IV, V 型の場合は長澤が研究しており，その成果は 2011 年 12 月仙台で行われた研究集会 Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis において発表された．

2　結果

I 型の一般回転超曲面について：R^n を n 次元ユークリッド空間とし，その点を $(x_1, x_2, ..., x_n)$ と書く．$(x(s), y(s))$ を R^n 内の平面 $x_3 = ... = x_n = 0$ 内の弧長 s で径数付けられた R 上定義された滑らかな曲線とし，$y(s) > 0$ とする．S^{n-2} を R^n の超平面 $x_1 = 0$ 内の単位超球面とする．そのとき I 型の一般回転超曲面 M は

$$M = \Big\{(x(s), y(s)S^{n-2}) \in R^n \mid s \in R\Big\}$$

で定義される．従って，これは 3 次元ユークリッド空間内の回転面の自然な一般化である．このとき M の平均曲率 H は s だけの関数 $H = H(s)$ となり，M の生成曲線 $(x(s), y(s))$

は次を満たす：

$$
\begin{aligned}
(n-1)H(s) = (n-2)\frac{x'(s)}{y(s)} + x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s),\\
x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \quad y(s) > 0,\ s \in R.
\end{aligned} \tag{1}
$$

逆に，$H = H(s)$ を R 上の与えられた連続関数として上を $(x(s), y(s))$ に関する連立微分方程式と考える．初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = y_0 > 0,\ x'(0) = c,\ y'(0) = d,\ c^2 + d^2 = 1$ のもとで，解 $(x(s), y(s))$ は微分方程式論の通常の解の存在定理より局所的に存在する．我々の結果はこの解が R 上全体に拡張できることを主張する．そのためには解曲線 $(x(s), y(s))$ が x-軸に到達したときの，解の挙動を調べることが必要になる．

命題 1 区間 (a, b) を上記の局所解曲線を拡張することにより存在する最大区間とする．$b = \infty$ なら証明することは何もないので，$b < \infty$ と仮定する．このとき，$\lim_{s->b} y(s) = 0,\ \lim_{s->b} x'(s) = 0$ かつ b に近い点で $y'(s) \neq 0$ が成立する．

解曲線 $(x(s), y(s))$ が R 上で存在することを示すには，上の命題で $b < \infty$ の場合が起きないことを示せばよい．矛盾は b を越えて解曲線が延長できることを示すことによりおきる．それで本論文の主要な点は次の特異初期値問題の解の存在を示すことにある．

方程式系 (1) は x-軸方向の平行移動で不変なので，$b = 0$ と仮定してよい．命題 1 より $b = 0$ の近くで関数 $y = y(s)$ は 1 対 1 なので，$s = s(y)$ をその逆関数とする．そして，$q = q(y) = x'(s)/y'(s)$ とおく．そのとき $q(y)$ はつぎを満たす：

$$
\begin{aligned}
y\frac{dq}{dy} &= -(n-2)q - (n-2)q^3 + (n-1)\tilde{H}(y)y(1+q^2)^{\frac{3}{2}},\\
q(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

ここで $\tilde{H}(y) := y'(0)H(s(y))$ とおく．(2) の第一式に y^{n-3} をかけると

$$
\frac{d}{dy}(y^{n-2}q) = \left\{-(n-2)q^3 + (n-1)\tilde{H}(y)y(1+q^2)^{\frac{3}{2}}\right\} y^{n-3}.
$$

上式を y で積分して次の積分方程式を得る：

$$
q(y) = \Phi(q)(y), \tag{3}
$$

ここで，

$$
\Phi(q)(y) = y^{2-n}\int_0^y \{-(n-2)q(\eta)^3 + (n-1)\tilde{H}(\eta)\eta(1+q(\eta)^2)^{\frac{3}{2}}\}\eta^{n-3}d\eta.
$$

バナッハ空間を設定し，そこで Φ が固定点をもつことを証明する．そのために，2 つの正数 Y, M に対し，

$$
\begin{aligned}
X_Y &= \{q \in C(0, Y] \mid \|q\|_X < \infty\},\ X_{Y,M} = \{q \in X_Y \mid \|q\|_X \le M\},\\
\|q\|_X &= \sup_{y\in(0,Y]}\left|\frac{q(y)}{y}\right|.
\end{aligned}
$$

とおく．X_Y はノルム $\|\cdot\|_X$ に関してバナッハ空間である．$q \in X_{Y,M}$ のとき，$|q(y) \le \|q\|_X|y| \longrightarrow 0 \quad (y \longrightarrow +0)$ が成立する．よって，$q(0) = 0$ とおくと，$q \in C[0, Y]$ である．

命題 2 1) $\tilde{H}$ が区間 $[0, Y]$ 上で有界と仮定する．そのとき十分大きな M と小なる Y が存在して，バナッハ空間 $X_{Y,M}$ 上で (3) の解 q が一意に存在する．
2) 更に $\tilde{H}$ が区間 $[0, Y]$ 上で連続と仮定すると，上で得られた q は (2) の解である．

証明のアイデア：$q \in X_{Y,M}$ のとき M, Y から独立な定数 C とある M が存在して，

$$\left|\frac{\Phi(q)(y)}{y}\right| \leq C(M^3y^2 + 1 + M^3y^3)$$

が成り立つようにできる．　そこで，定数 M, Y を

$$C(M^3Y^2 + 1 + M^3Y^3) \leq M$$

を満たすように選ぶ．このような M と Y に対して，$\|\Phi(q)\|_X \leq M$ より，$\Phi(q) \in X_{Y,M}$ である．次に Y を更に小にとると，$\Phi : X_{Y,M} \longrightarrow X_{Y,M}$ が縮小写像であることを示す．実際，$q_1, q_2 \in X_{Y,M}$ に対し定数 C が存在して，

$$\left|\frac{\Phi(q_1)(y) - \Phi(q_2)(y)}{y}\right| \leq C(M^2y^2 + My^2 + M^2y^3)|q_1 - q_2\|_X.$$

そこで，Y を $C(M^2Y^2 + MY^2 + M^2Y^3) < 1$ を満たすようにとると，Φ は $X_{Y,M}$ 上の縮小写像である．よってバナッハの不動点定理より命題 2 の 1) が示された．
2) について：q を (3) の解とする．そのとき，

$$y^{n-2}q(y) = \int_0^y \{-(n-2)q(\eta)^3 + (n-1)\tilde{H}(\eta)\eta(1 + q(\eta)^2)^{3/2}\}\eta^{n-3}d\eta$$

より，右辺は y に関して微分可能である．よって q も微分可能である．上式を y について微分して (2) の第一式を得る．$q \in X_{Y,M}$ から $q(0) = 0$ である．以上をまとめて次の定理 [5] を得た．

定理 1 $H(s)$ を R 上の連続関数とする．任意の正数 y_0 と実数 $c, d(c^2 + d^2 = 1)$ に対し，初期条件 $x(0) = 0, y(0) = y_0, x'(0) = c, y'(0) = d$ を満たし，R 全体で定義された (1) の解 $x(s), y(s)$ が存在する．

3　II 型の場合

論文 [5] において，我々は II 型の一般回転超曲面に対しても大域解の存在を証明した．ここではその内容を簡単に紹介するにとどめる．

第一象限内で曲線 $(x(s), y(s))$ を考える．与えられた自然数 $n(\geq 4)$ に対し，自然数 l, m を $(l+1) + (m+1) = n$ を満たすようにとって固定する．そして，n 次元ユークリッド空間 R^n を $R^n = R^{l+1} \bigoplus R^{m+1}$ と直和分解しておく．このような記号の元で，II 型の一般回転面 M とは

$$M = \left\{(x(s)S^l, y(s)S^m) \in R^{l+1} \bigoplus R^{m+1} | s \in R\right\},$$

（ここで，S^l は R^{l+1} の原点中心の単位超球面で，S^m も同様に定義する）である．この超曲面の平均曲率は s のみの関数 $H(s)$ となり次式で与えられる：

$$
\begin{aligned}
&(n-1)H(s) = -l\frac{y'(s)}{x(s)} + m\frac{x'(s)}{y(s)} + x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s), \\
&x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \quad x(s) > 0,\ y(s) > 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

II 型の場合において I 型と異なる状況は生成曲線 $(x(s), y(s))$ が原点 $(0,0)$ へ向かうときにおきる．このときでも局所解が延長できることを示すことができるが，その計算は I 型と較べてはるかに複雑である．詳細は我々のプレプリント [5] を参照されたい．

（2012 年 2 月 18 日）

参考文献

[1] J. Dorfmeister and K. Kenmotsu, Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, *Differential Geom. Appl.* 27 (2009), 702–712.

[2] W.-Y. Hsiang, Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces, I, *J. Differential Geom.* 17 (1982), 337–356.

[3] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with prescribed mean curvature, *Tôhoku Math. J. (2)* 32 (1980), 147–153.

[4] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with periodic mean curvature, *Osaka J. Math.* 40 (2003), 687–696.

[5] K. Kenmotsu and T. Nagasawa, Global existence of generalized rotaional hypersurfaces with prescribed mean curvature, (2012), February, preprint.