対称空間 FI の全測地的曲面

法政大学・理工学部　　間下克哉

例外型複素単純リー環の 3 次元単純リー部分環は Dynkin によって分類されている．Dynkin の分類を利用して，FI 型の既約リーマン対称空間の全測地的曲面の分類を行った．

Theorem 1 $F_4/(Sp(1)\times Sp(3))/\mathbf{Z}_2$ の全測地的曲面の合同類は *15* 個である．

1.　TDS の分類

複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の 3 次元単純リー部分環 (TDS) [1] の基底 H, X, Y で

$$[H,X]=2X,\quad [H,Y]=-2Y,\quad [X,Y]=H \tag{1}$$

を満たすものが存在する．H を TDS の **defining vector** という．$\mathfrak{g}$ のルート α に対するルートベクトルを X_α とするとき，X，Y はルートベクトルの一次結合

$$X=\sum_{\alpha(H)=2} p_\alpha X_\alpha,\quad Y=\sum_{\alpha(H)=2} p_{-\alpha} X_{-\alpha} \tag{2}$$

として表すことができる．ルート系に適当に辞書式順序を定めて，$\Pi(\mathfrak{g})=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ を単純ルートの全体とするとき $\alpha_i(H)$ の値は 0, 1, 2 のうちのどれかである．

とくに，すべての単純ルート $\alpha_i\in\Pi(\mathfrak{g})$ に対して $\alpha_i(H)=2$ となる H に対して (1) を満たす X，Y が存在することがわかる．$\mathbf{C}H\oplus\mathbf{C}X\oplus\mathbf{C}Y$ を $\mathfrak{g}$ の **principal TDS** という．

$\mathfrak{f}_4$ の TDS は，$\mathfrak{f}_4$ の適当な regular subalgebra の principal TDS である．

2.　全測地的曲面の分類の方針

G をコンパクト単純リー群，$M=G/K$ を既約リーマン対称空間とする．G，K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ で表し，$\mathfrak{k}$ の G 不変内積に関する直交補空間を $\mathfrak{p}$ とする．

M の全測地的曲面 S を保存する元全体のなす G のリー部分群を U とする．U のリー環 $\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{su}(2)$ に，$U\cap K$ のリー環は $\mathfrak{so}(2)$ に同型だから，$\mathfrak{u}$ の基底 X_1, X_2, X_3 を

$$[X_i,\ X_{i+1}]=2\,X_{i+2},\quad X_1\in\mathfrak{k},\quad X_2,\ X_3\in\mathfrak{p}$$

となるようにとることができる．

$$H=-\sqrt{-1}\,X_2,\quad X=\frac{1}{2}\left(X_1+\sqrt{-1}\,X_3\right),\quad Y=\frac{1}{2}\left(-X_1+\sqrt{-1}\,X_3\right). \tag{3}$$

[1] Three dimensional Simple Lie subalgebra

とおけば H, X, Y は (1) を満たす.

K のワイル群の作用により H を，K の positive Weyl chamber の元とすることができる．G のワイル群の作用まで考えれば，H は，Dynkin の分類にある defining vector とすることができる．したがって，全測地的曲面を保存する 3 次元単純リー部分群から出発して作られた　TDS の defining vector（即ち (3) の H）は，Dynkin の分類に現れる defining vector H_0 に，$W(\mathfrak{f}_4)/W(\mathfrak{c}_1\oplus\mathfrak{c}_3)$ の剰余類の代表元 s ($\mathfrak{f}_4$ の positive Weyl chamber を $\mathfrak{c}_1\oplus\mathfrak{c}_3$ の positive Weyl chamber に移すように選んでおく）を作用させて得られるものとなる.

$\mathfrak{g}=\mathfrak{f}_4$ の場合，defining vector は $\mathfrak{f}_4$ のある regular subalgebra ($\mathfrak{g}_0$ とする) の principal TDS だから，$s\cdot H_0$ が定める TDS と $\mathfrak{f}_4$ の共通部分が全測地的曲面の等長変換群のリー環になるかどうかは，regular including subalgebra の全ての単純ルートに対するルートベクトルが $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ に含まれるかどうかを調べることによってわかる.

3.　$\mathfrak{f}_4$ のワイル群 ε_i $(1\le i\le 4)$ を $\mathbf{R}^4$ の正規直交基底とし

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1\le i<j\le 4)\}\,,\\
R_1 &= \{\pm\varepsilon_i \quad (1\le i<j\le 4)\}\,,\\
R_2 &= \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} s_i\varepsilon_i \quad (|s_i|=1,\ \Pi s_i=1)\right\},\\
R_3 &= \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} s_i\varepsilon_i \quad (|s_i|=1,\ \Pi s_i=-1)\right\}
\end{aligned}
$$

とするとき，$R_0\cup R_1\cup R_2\cup R_3$ は $\mathfrak{f}_4$ 型のルート系である．$R_0\cup R_1$，$R_0\cup R_2$，$R_0\cup R_3$ のいずれも $\mathfrak{b}_4$ 型のルート系で，$\mathfrak{f}_4$ のワイル群は $\mathfrak{b}_4$ のワイル群と Z_3 の半直積である．したがって位数は 1152 である．また $\mathfrak{c}_1\oplus\mathfrak{c}_3$ のワイル群の位数は 96 で $\#(W(\mathfrak{f}_4)/W(\mathfrak{c}_1\oplus\mathfrak{c}_3)) = 1152\div 96 = 12$ となる.

問題は，ワイル群の剰余類の代表元（s とする）と，Dynkin の分類にある TDS を含む minimal including regular subalgebra の基本ルート系 $(\{\alpha_1,\cdots,\alpha_4\})$ に対して，

$$
s\cdot X_{\alpha_1},\ \cdots,\ s\cdot X_{\alpha_r}\in\mathfrak{p}
$$

となるかどうかを調べることであった．剰余類の個数が 12，TDS の個数が 15 だから１８０の場合について調べることになるが，数式処理ソフト Maxima を用いたプログラムを作成してこれを実行した.

参考文献

[1]　E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 6 (1957), 111-244.