完備極小部分多様体の構成法について

岡安　隆　　　　　茨城大学教育学部

1　ユークリッド空間の極小超曲面

3 次元ユークリッド空間の極小曲面については Weierstrass-Enneper の表現公式があり複素関数論が使える．良いところは式で直接書けるところであるが，悪いところは大域的性質がそのままではわからないところである．それに対して近年，非線形解析を用いてさまざまな極小曲面（極小超曲面）が作られてきている．極小超曲面の近似解を作り，それを微小変形して本当の解を作る．良い点はトポロジーがわかるところであり，悪いところは計算が大変であるところである．

この小論では，equivariant differential geometry （同変微分幾何学）という古典的手法を用いて完備極小超曲面を構成する．これは 1980 年代に Hsiang 達が盛んに使った手法であり，彼らはユークリッド空間をはじめいろいろな空間の中に多くの平均曲率一定超曲面を作った．

2　主定理

[2] で Bombieri 達が扱っている結果は以下の二つである．

- Bernstein 予想の反例を構成した
- J. Simons の minimal cone が面積最小性をもつことを示した．
  この証明に，$O(p) \times O(p)$ 不変で，滑らかな完備極小超曲面の存在が使われている．

今回我々が得た結果は上記の定理に密接に関係している．1998 年の春の学会で Bernstein の定理を高余次元に拡張した次の定理を発表した．

定理　$u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ のグラフ $M^n = \{(x, u(x)) | x \in \mathbf{R}^n\}$ が $\mathbf{R}^{n+p}$ の極小部分多様体であって，その法曲率が平坦であるとする．もし

$$\sqrt{g(x)} = o\Big((|x|^2 + |u(x)|^2)^r\Big) \quad \text{for some } 0 \le r < \tfrac{1}{2}$$

$$(\ g = \det(g_{ij}),\ g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^j})$$

ならば，u は一次関数となる．

関連する結果は，Mu-Tao Wang [7], Smoczyk et al. [6] がある．

さて，完備極小部分多様体で法曲率が 0 の例は極小超曲面の直積以外に知られていない．そこでこの Bernstein 型定理をおもしろいものにするため，完備極小部分多様体で “法曲率が 0” の例を多く作ることが重要である．

また，Bombieri 達は $O(p)\times O(p)$ 不変完備極小超曲面の存在を示すために Poincaré- Bendixson の方法を用いて解析した．Alencar et al.[1] はその方法を詳細に検討してトポロジーの異なるいくつかのタイプの完備極小超曲面の存在を示した．しかし，$O(p)\times O(p)$ 不変極小超曲面以外の一般化された回転極小超曲面の存在の証明は現在までなされていない．そこには技術的な問題があると思われる．そこでそれら cohomogeneity 2 の完備極小超曲面の存在を全く別の方法を用いて証明することがこの小論の二つめの結果である．

主定理

(1)　ユークリッド空間に，余次元 2 の, 法曲率が平坦な完備極小部分多様体を沢山構成することができる．それらは，次のような多様体に微分同相であり，また，各多様体に微分同相で合同でないものが無限個作れる．

(2)　ユークリッド空間に，完備極小超曲面を沢山構成することができる．それらは，次のような多様体に微分同相であり，また，各多様体に微分同相で合同でないものが無限個作れる．

$$S^p\times S^q\times \mathbf{R},\quad \frac{SO(2)\times SO(n)}{\mathbf{Z}_2\times SO(n-2)}\times\mathbf{R},\quad \frac{SU(3)}{T^2}\times\mathbf{R}$$
$$\frac{G_2}{T^2}\times\mathbf{R},\quad \frac{F_4}{Spin(8)}\times\mathbf{R},\quad \ldots\text{（13 種類）}$$

3　方法と結果

equivariant differential geometry （同変微分幾何学）は Hsiang-Lawson によって創始された手法であり，大きな等長変換群が作用する部分多様体，つまり cohomogeneity 2 (軌道の余次元が 2) の一般化された回転面を用いるものである．その利点は，平均曲率一定方程式はそのままでは非線形な偏微分方程式であり解きにくいが，対称性を用いることにより常微分方程式に帰着させて，解きやすくする点にある．

体積の第一変分を計算することにより次の公式はすぐ得られる．

定理（平均曲率公式, [2]）

Riemann 多様体 N に等長群 G が作用しているとする．$M\subset N$ を G 不変部分多様体であって，N と同じ主軌道型をもつとする．x を軌道 ξ 上の点とし，ν_x を点 $x\in M$ での任意の単位法ベクトル，ν_ξ を N/G での ν_x の像とする．$f(\xi)$ を軌道 ξ の体積とすると，

$$H(\nu_x)=H'(\nu_\xi)-\frac{d}{d\nu_\xi}\log f(\xi)$$

が成り立つ．ここで $H(\nu_x)$ は M の ν_x 方向の平均曲率であり，$H'(\nu_\xi)$ は M/G の ν_ξ 方向の平均曲率をあらわす.

次の補題が鍵となる．

補題（変分問題と保存量）

$$I[x(t),\ y(t)]=\int F(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})dt$$

の変分問題の解は，次の保存量を持つ

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}} = (\text{定数})$$

以上をまとめると次の定理が得られる．

定理 A　$(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を cohomogeneity 2 の直交表現，$G/W \subset \mathbf{R}^2$ をその軌道空間とし，$v(x,\ y)$ を $(x,y) \in G/W$ を通る軌道の体積関数とする．

$(G \times \mathrm{id},\ \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R})$ を考え，母線

$$\gamma(t) = (x(t),\ y(t),\ t) \subset G/W \times \mathbf{R}$$

をとるとき，γ を母線にもつ一般化された回転面 M_γ が極小部分多様体であることの必要十分条件は

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{v_x}{v} \\[2ex] \dfrac{\ddot{y}}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = \dfrac{v_y}{v} \end{cases} \tag{1}$$

である．さらに補題から保存量

$$\frac{v(x,\ y)^2}{1+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} = C(\text{定数})$$

をもつことがわかる．

したがって $v(x(0),\ y(0))^2/\{1+\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2\} = C = 1$ を仮定すると方程式 (1) は次の方程式と同値になる．

$$\begin{cases} \ddot{x} &= vv_x \\ \ddot{y} &= vv_y. \end{cases} \tag{2}$$

次の定理が解曲線が完備となることを保証してくれる．

定理（Chen-Tsai, [3]）　$f(x,\ y), g(x,\ y)$ を $\mathbf{R}^2$ で定義された滑らかな関数で $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ を満たすものとする．次の方程式を考える．

$$\begin{cases} \ddot{x} &= f(x,\ y) \\ \ddot{y} &= g(x,\ y). \end{cases} \tag{3}$$

$E(t) = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 - 2M(x,y)$ と置く．ただし

$$M(x,\ y) = \int_0^x f(s,y)ds + \int_0^y g(0,s)ds$$

とする．さらに次の不等式が成り立つ $r > 0$ が存在すると仮定する．

$$xf(x,\ y) + yg(x,\ y) \geq 2(2r+1)M(x,\ y).$$

このとき，(3) の解は有限時間で爆発する（無限大になる）．

我々の場合，軌道の体積関数 $v(x,\ y)$ が k 次の同次多項式なので Chen-Tsai の定理の条件をすべて満たしていることがわかり，任意の初期値に対して解が爆発することがいえ，極小部分多様体 M_γ が完備であることがわかる．定理 A を参考にして極小超曲面について次の結果を得ることができる．

定理 B　$(G,\ \mathbf{R}^{n+1})$ を cohomogeneity 2 の直交表現，$G/W \subset \mathbf{R}^2$ をその軌道空間とし，$v(x,\ y)$ を $(x,y) \in G/W$ を通る軌道の体積関数とする．

$$\gamma(t) = (x(t),\ y(t)) \subset G/W$$

が以下の方程式を満たせば M_γ は極小超曲面になる．

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = \dfrac{v_x}{v} \\ \dfrac{\ddot{y}}{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = \dfrac{v_y}{v}. \end{cases} \tag{4}$$

さらに方程式 (4) は保存量 $\dfrac{v(x,\ y)^2}{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = C$ (定数) をもつこともわかる．したがって $v(x(0),\ y(0))^2/\{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2\} = C = 1$ を仮定すると方程式 (4) は次の方程式と同値になる．

$$\begin{cases} \ddot{x} &= vv_x \\ \ddot{y} &= vv_y. \end{cases}$$

したがって，Chen-Tsai の定理から有限時間で爆発する解，つまり無限に伸びる解曲線を得ることができる．

参考文献

[1] H. Alencar et al., $\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n)$-*invariant minimal hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{m+n}$, Ann. Global Anal. Geom. 27 (2005), no. 2, 179–199.

[2] B. Allen, M. do Carmo and W-Y. Hsiang, *On some fundamental equations of equivariant Riemannian geometry*, Tamkang J. Math., 40 (2009), 343–376.

[3] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. 7 (1969), 243–268.

[4] Y. C.Chen and L. Y. Tsai, *Blow-up solutions of nonlinear differential equations*, Appl. Math. Comput. 169 (2005), no. 1, 366–387.

[5] W-Y. Hsiang and H.B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry 5 (1971), 1–38.

[6] K. Smoczyk, G. Wang and Y. L. Xin, *Bernstein type theorems with flat normal bundle*, Calc. Var. Partial Differential Equations 26 (2006), no. 1, 57–67.

[7] Mu Tao Wang, *Stability and curvature estimates for minimal graphs with flat normal bundles*, arXiv:math/0411169v2 [math.DG] (2004).