複素二次超曲面の実形のHamilton体積最小性について*

酒井 高司（首都大学東京理工学研究科）

Kähler 多様体内の Lagrange 部分多様体の Hamilton 変形の下での変分問題は Y.-G. Oh [6] により研究が始められた．Kähler 多様体 (M, J, ω) の Lagrange 部分多様体 L は，任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について

$$\mathrm{vol}(\phi L) \geq \mathrm{vol}(L)$$

をみたすとき Hamilton 体積最小であるという．Hamilton 体積最小な Lagrange 部分多様体の非自明な例として知られているものは非常に少なく，Kleiner と Oh [6] による $\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$ と入江博氏・小野肇氏との共同研究 [3] で示した $S^2 \times S^2$ 内の $S^1 \times S^1$ だけであった．

コンパクト型 Hermite 対称空間 G/K の対合的反正則等長変換 σ の固定点集合として与えられる全測地的 Lagrange 部分多様体 L は G/K の実形と呼ばれる．コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は分類が与えられており，複素二次超曲面

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\} \cong SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$$

の実形は $S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ $(k = 0, 1, \ldots, [n/2])$ と合同になる．$S^{1,1} \cong S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^2 \cong Q_2(\mathbb{C})$ の Hamilton 体積最小性の一般化として，$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^{k,n-k}$ に対して次のような Hamilton 変形の下での体積評価を与えることができる．

定理 1 ([4])**.** $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^{k,n-k}$ は任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega)$ について

$$\mathrm{vol}(\phi S^{k,n-k}) \geq \mathrm{vol}(S^{0,n})$$

をみたす．特に，$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^{0,n} \cong S^n$ は Hamilton 体積最小である．

定理 1 を証明するために，まず Lagrange 部分多様体の交点数に関する Arnold-Givental 不等式の一般化が必要になる．Arnold-Givental 不等式はシンプレクティック多様体内の Lagrange 部分多様体 L とその Hamilton 変形 ϕL の交点数の評価式である．論文 [4] ではある条件の下でコンパクト型 Hermite 対称空間の互いに合同とは限らない 2 つの Lagrange 部分多様体 L_0 と L_1 の組みに対する Floer ホモロジーを求め，それにより次のような Arnold-Givental 不等式の一般化を得た．

命題 2 (一般化された Arnold-Givental 不等式)**.** G/K を既約なコンパクト型 Hermite 対称空間とし，L_0 と L_1 を G/K の実形とする．このとき，L_0 と ϕL_1 が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(G/K, \omega)$ について，

(i) $G/K = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ で，L_0 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同，L_1 は $U(2m)$ と合同な場合は

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2^m,$$

(ii) それ以外の場合は

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$SB(L_i, \mathbb{Z}_2)$ $(i = 0, 1)$ は L_i の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の和を表す．

*本研究は入江博氏（東京電機大学），田崎博之氏（筑波大学）との共同研究である．

また，$Q_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向き付けられた 2 次元部分空間全体のなす実 Grassmann 多様体 $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+2})$ と同一視され，次のような Lê による Grassmann 多様体における積分不等式が成り立つ．

定理 3 (Lê [5])**.** 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \cong \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の実 n 次元部分多様体 N に対して

$$\int_{SO(n+2)} \#(gS^n \cap N) d\mu_{SO(n+2)}(g) \leq 2\frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^n)}\mathrm{vol}(N) \tag{2}$$

が成り立つ．

定理 1 の証明　(2) において $N = \phi S^{k,n-k}$ $(k = 0, 1, \dots, [n/2])$ とおくと，(1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\phi S^{k,n-k}) &\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))}\int_{SO(n+2)} \#(gS^n \cap \phi S^{k,n-k}) d\mu_{SO(n+2)}(g) \\
&\geq \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2\mathrm{vol}(SO(n+2))}\int_{SO(n+2)} 2 d\mu_{SO(n+2)}(g) \\
&= \mathrm{vol}(S^n).
\end{aligned}$$

□

注意 4. Gluck-Morgan-Ziller [2] は n が 4 以上の偶数のとき，$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 S^n はホモロジー類の中で体積最小であることを示している．一方，$Q_n(\mathbb{C})$ の奇数次のホモロジーは消えているので，n が奇数の場合には実形 S^n はホモロジー類の中で体積最小にはならない．定理 1 は，n が奇数の場合に Hamilton 体積最小な Lagrange 部分多様体の新しい例を与えている．

注意 5. 既約なコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の Hamilton 安定性は Oh [6], Amarzaya-大仁田 [1] により決定されており，$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $S^{k,n-k}$ は $n-2k \leq 2$ の場合に限り Hamilton 安定となる．$S^{0,n} \subset Q_n(\mathbb{C})$ および $S^{1,1} \subset Q_2(\mathbb{C})$ 以外の場合に，これら Hamilton 安定な実形が Hamilton 体積最小になるかどうかは未解決である．

参考文献

[1] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex projective spaces*, Tohoku Math. J. (2) **55** (2003), 583–610.

[2] H. Gluck, F. Morgan and W. Ziller, *Calibrated geometries in Grassmann manifolds*, Comm. Math. Helv. **64** (1989), 256–268.

[3] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, *Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in* $S^2 \times S^2$, Proc. Japan Acad. **79** Ser. A (2003), 167–170.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, preprint.

[5] Lê Hông Vân, *Application of integral geometry to minimal surfaces*, Int. J. Math. **4** (1993), 89–111.

[6] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501-519.