特異点を許す $\mathbf{R}^3_1$ 内の時間的極小曲面について

大阪大学大学院理学研究科 博士前期課程 2 年
高橋 英伸

3 次元アフィン空間 $\mathbf{R}^3$ に符号数 $(-++)$ の内積を備えたものを $\mathbf{R}^3_1$ で表し，3 **次元 Lorentz-Minkowski 空間**と呼ぶ．M^2 を 2 次元多様体とし，C^∞-写像 $f : M^2 \to \mathbf{R}^3_1$ をはめ込みとする．このとき，f が**時間的はめ込み**であるとは，f による誘導計量が Lorentz 計量となるときにいう．さらに，平均曲率が恒等的に 0 となるとき，f を**時間的極小はめ込み**という．次に，M^2 を向き付けられた 2 次元多様体とする．M^2 上の $(1,1)$-テンソル場 J で，M^2 の各点 q における値 J_q を 2 回合成したものが q における M^2 の接空間の線形変換として恒等写像になり，J_q の $+1$ 固有空間と -1 固有空間の次元が一致するものが存在するとする．このとき J は常に**可積分**となる，つまり M^2 の各点 q に対して，q の近傍における M^2 の向きに同調した局所座標系 (u,v) で，

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = -\frac{\partial}{\partial v} \tag{1}$$

を満たすものが存在する．この J を M^2 上の p-**複素構造**あるいは**パラ複素構造**という．また，(M^2, J) を p-**Riemann 面**といい，式 (1) を満たす局所座標系を**等方的座標系**という．p-Riemann 面には Lorentz 計量が存在し，逆に，向き付けられた 2 次元 Lorentz 多様体には自然に p-複素構造が誘導される．

特異点に関する基本的な用語を定義する．$\mathbf{R}^2$ の開集合 U から $\mathbf{R}^3$ への C^∞-写像 f のはめ込みでない点を f の**特異点**という．U_1 と U_2 を $\mathbf{R}^2$ の開集合とするとき，2 つの C^∞-写像 $f_1 : U_1 \to \mathbf{R}^3$ と $f_2 : U_2 \to \mathbf{R}^3$ が $q_1 \in U_1$ と $q_2 \in U_2$ において**右左同値**であるとは，$\varphi(q_1) = q_2$ を満たす $\mathbf{R}^2$ の局所微分同相写像 φ と $\Phi(f_1(q_1)) = f_2(q_2)$ を満たす $\mathbf{R}^3$ の局所微分同相写像 Φ が存在し，$f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ を満たすときにいう．

$$f_C(u,v) := (2u^3, -3u^2, v), \quad f_S(u,v) := (3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv, v), \quad f_{CCR} := (u, v^2, uv^3)$$

はそれぞれ原点において特異点を持つが，これらの写像と原点において右左同値な写像をそれぞれ**カスプ辺**，**ツバメの尾**，**カスプ状交叉帽子**という．

カスプ辺とツバメの尾，カスプ状交叉帽子は時間的極小曲面に頻繁に現れる特異点である．そこで，これらの特異点を許す時間的極小曲面の定義を以下のように与える．

定義 M^2 を p-Riemann 面とし，$f : M^2 \to \mathbf{R}^3_1$ を C^∞-写像とする．次の 2 条件を満たすとき，f を M^2 上の**極小面**という．

(1) M^2 の開かつ稠密な部分集合 W が存在し，f の W への制限 $f|_W$ が共形的な時間的極小はめ込みとなる．

(2) M^2 の任意の点 q に対し，q の近傍 U における局所等方的座標系 (u,v) を任意にとると，f_u と f_v はともに U 上で至るところ 0 にならない．ただし，$f_u = \partial f/\partial u, f_v = \partial f/\partial v$ である．

3 次元 Euclid 空間内の極小曲面の類似として，$\mathbf{R}^3_1$ 内の時間的極小曲面に対しても **Weierstrass 型の表現公式**が得られる (cf. [IT], [Le])．与えられた点に対し，その点の近傍における局所等方的座標系 (u,v) をとると，2 つの実 1 変数関数と 2 つの実 1 変数の 1 次微分形式の 4 つ組

$$(g_1(u), g_2(v), \hat{\omega}_1(u)du, \hat{\omega}_2(v)dv)$$

により，極小面を構成することができる．[KRSUY] と [FSUY] で与えられた特異点の判定法を適用することにより，極小面に頻繁に現れる 3 つの特異点に対して，以下の判定法を得た．

定理 U を $\mathbf{R}^2$ 内の領域とし，(u,v) を U における局所等方的座標系とする．$f:U\to\mathbf{R}^3_1$ を極小面とし，$(g_1(u),g_2(v),\hat{\omega}_1(u)du,\hat{\omega}_2(v)dv)$ を上述の 4 つ組とすると，次が成り立つ：

(1) $q=(a,b)\in U$ が f の特異点であるための必要十分条件は，$g_1(a)g_2(b)=1$ となることである．

(2) f の特異点 $q\in U$ において f がカスプ辺に右左同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}+\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\neq 0,\quad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}-\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\neq 0$$

が q において成り立つことである．

(3) f の特異点 $q\in U$ において f がツバメの尾に右左同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}+\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\neq 0,\quad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}-\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}=0,\quad \left(\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}\right)_u\frac{(g_2)_v}{g_2}+\left(\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\right)_v\frac{(g_1)_u}{g_1}\neq 0$$

が q において成り立つことである．

(4) f の特異点 $q\in U$ において f がカスプ状交叉帽子に右左同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}+\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}=0,\quad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}-\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\neq 0,\quad \left(\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1}\right)_u\frac{(g_2)_v}{g_2}-\left(\frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2}\right)_v\frac{(g_1)_u}{g_1}\neq 0$$

が q において成り立つことである．

[UY] と [FSUY] では $\mathbf{R}^3_1$ 内の空間的極大曲面に対して，カスプ辺とツバメの尾，カスプ状交叉帽子の判定法を与えている．また，$\mathbf{R}^3_1$ 内の空間的平均曲率一定曲面に対しても [Um] で同様の判定法が与えられている．$\mathbf{R}^3_1$ 内の時間的平均曲率一定曲面に対しても最近 [BS] によって同様の判定法が与えられた．ただし，[BS] は平均曲率が 0 でない場合の結果であり，本研究の結果は含まれていない．

$f:U\to\mathbf{R}^3_1$ を極小面とし，対応する 4 つ組を $(g_1,g_2,\omega_1,\omega_2)$ とするとき，その 4 つ組を $(g_1,g_2,\omega_1,-\omega_2)$ に変換して得られる極小面を f の**共役な極小面**という．定理から，ツバメの尾とカスプ状交叉帽子の間に以下のような双対性があることが示せる．

系 極小面 $f:U\to\mathbf{R}^3_1$ が $q\in U$ においてツバメの尾に右左同値であることと，f の共役な極小面が q においてカスプ状交叉帽子に右左同値であることは同値である．

参考文献

[BS] D. Brander and M. Svensson, *Timelike constant mean curvature surfaces with singularities*, arXiv:1110.4449v1 [math.DG].

[FKKRUY] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and spacelike CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space*, Preprint.

[FSUY] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827-848.

[IT] J. Inoguchi and M. Toda, *Timelike minimal surfaces via loop groups*, Acta. Appl. Math. **83** (2004), 313-335.

[KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303-351.

[Le] S. Lee, *Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space*, Commun. Math. Anal. 2008, Conference 1, 11-19.

[Um] Y. Umeda, *Constant mean curvature surfaces with singularities in Minkowski 3-Space*, Experiment. Math. J. **35** (2006), 13-40.

[UY] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math J. **35** (2006), 13-40.