Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces

田中 真紀子

東京理科大学理工学部

1　はじめに

本講演は Augsburg 大学の Peter Quast 氏との共同研究 [26] に基づいている。

Riemann 多様体 (M, g) の各点 $x \in M$ に対して、**点対称**とよばれる、x を孤立不動点としてもつような対合的等長変換 $s_x : M \to M$ が存在するとき、(M, g) は **Riemann 対称空間**とよばれる。Riemann 対称空間 (M, g) が Riemann 多様体として既約ならば、Riemann 計量 g は定数倍を除いて一意的であることが知られている。以下、Riemann 対称空間を単に M と表す。点対称の存在から、Riemann 対称空間 M には等長変換群 $I(M)$ が推移的に作用し、特に、M が連結ならば $I(M)$ の単位元連結成分 $I_0(M)$ が推移的に作用する。したがって、$G = I_0(M)$ とおくと、M は G の等質空間として $M = G/K$ と表すことができる。ここで、K はある点 $o \in M$ におけるイソトロピー部分群である。以下では、特にことわらない限り Riemann 対称空間は連結とする。Riemann 対称空間 $M = G/K$ において、G がコンパクト半単純 Lie 群のとき、M は**コンパクト型**とよばれる。また、G が非コンパクト半単純 Lie 群で K が G の極大コンパクト部分群のとき、M は**非コンパクト型**とよばれる。コンパクト Lie 群は両側不変 Riemann 計量に関して Riemann 対称空間である。$SU(n)$ はコンパクト型であるが、$U(n)$ は（コンパクトではあるが）コンパクト型ではない。Riemann 対称空間 M の全測地的部分多様体 N の各点 $x \in N$ において、M における x での点対称 s_x は N を保ち、N の点対称を誘導する。したがって、N は Riemann 対称空間である。Riemann 対称空間の全測地的部分多様体の分類に関しては、部分的な結果はあるが（Wolf ([33]), Chen-長野 ([2], [3]), 井川-田崎　([7]), 木村-田中　([8]), Klein ([9], [10], [11], [12]) など）未解決である。

2　対称 R 空間

$M=G/K$ をコンパクト型 Riemann 対称空間とし、o を原点とする。すなわち、$K=\{g\in G \mid g\cdot o=o\}$ である。このとき、K の作用の o における微分は、o での接ベクトル空間 $T_o(M)$ の線形変換であり、これは K の**線形イソトロピー表現**とよばれる。コンパクト Riemann 対称空間 P があるコンパクト型 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道として実現できるとき、P を**対称 R 空間**とよぶ。例えば、Grassmann 多様体 $G_r(\mathbb{K}^n)$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$) は、それぞれ $SU(n)/SO(n)$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)、$SU(n)$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$)、$SU(2n)/Sp(n)$ ($\mathbb{K}=\mathbb{H}$) の線形イソトロピー軌道である。ここで $G_r(\mathbb{K}^n)$ は $\mathbb{K}^n$ の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体からなる Grassmann 多様体を表す。

対称 R 空間は、長野正が $I_0(M)$ を含む非コンパクト Lie 群の作用を許容するコンパクト Riemann 対称空間として導入した ([20])。その後、竹内勝が多くの基本的かつ重要な研究を行った ([28], [29], [30] など)。竹内は対称 R 空間を、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形（対合的反正則等長変換の不動点集合の連結成分）として特徴付けた。また、Loos は対称 R 空間を、極大トーラスの単位格子が互いに直交し長さの等しい基底によって生成される、という性質で特徴付けた ([18], [19])。さらに、対称 R 空間は、外的対称空間 (Euclid 空間の部分多様体で、各点でアフィン法空間に関する鏡映で不変なもの）として特徴付けられる (Ferus [6], Eschenburg-Heintze [5])。対称 R 空間は小林-長野により分類された ([13])。そのリストは例えば [1] の 311 ページにある。

3　鏡映部分多様体

Riemann 多様体 M の対合的等長変換の不動点集合の連結成分は**鏡映部分多様体**とよばれる。定義により、鏡映部分多様体は全測地的部分多様体である。D. S. P. Leung は単連結既約コンパクト型 Riemann 対称空間の鏡映部分多様体の分類を与えた ([14], [15], [16], [17])。

Riemann 対称空間 M において、点対称は対合的等長変換である。τ を M の任意の対合的等長変換とし、$N=F(\tau,M)_{(p)}$ を τ の不動点集合の p を含む連結成分とすると、N は M の鏡映部分多様体である。このとき、$N^{\perp}:=F(s_p\circ\tau,M)_{(p)}$ も M の鏡映部分多様体で、s_p が $T_p(M)$ に $-\mathrm{id}$ として作用することから、点 p における N および $N^{\perp}$ の接ベクトル空間は互いに直交補空間である。このように、鏡映部分多様体は常に N と $N^{\perp}$ の対として現れる。特に、M がコンパクト対称空間のとき、$o\in M$ に対して定まる $N=F(s_o,M)_{(p)}$ および $N^{\perp}=F(s_p\circ s_o,M)_{(p)}$ はそれぞれ**極地**および**子午空間**とよばれ、M の幾何構造を反映する全測地的部分多様体であることが知られている（Chen-長野 ([2], [3], [4]), 長野 ([21], [22]), 長野-田中 ([23], [24], [25]))。

4　凸性

Riemann 多様体 M の全測地的部分多様体 N が凸であるとは、任意の 2 点 $x, y \in N$ に対して N における距離 $d_N(x, y)$ が M における距離 $d_M(x, y)$ に一致すること。言い換えると、$x, y \in N$ を結ぶ N における最短測地線が M においても最短であること。

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 $o \in M$ に対して、$\tilde{C}_o(M)$ で M における o の接最小跡を表す。次の命題は酒井によるコンパクト Riemann 対称空間の最小跡に関する結果 ([27]) から得られる。

命題 4.1 (田崎 [32]) M_1, M_2 をコンパクト Riemann 対称空間とし、M_1 は M_2 の全測地的部分多様体とする。$i = 1, 2$ に対して (G_i, K_i) を M_i に対応する Riemann 対称対で $G_1 \subset G_2, K_1 \subset K_2$ を満たすものとする。$o \in M_1$ を原点とする。$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{m}_i$ を G_i の Lie 環 $\mathfrak{g}_i$ の標準分解とする。$\mathfrak{m}_i$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$ を満たすように取り、A_i を $\mathfrak{a}_i$ に対応する M_i の極大トーラスとする。このとき、もし

$$\tilde{C}_o(A_1) = \mathfrak{a}_1 \cap \tilde{C}_o(A_2)$$

が成り立つならば

$$\tilde{C}_o(M_1) = \mathfrak{m}_1 \cap \tilde{C}_o(M_2) \tag{1}$$

が成り立つ。したがって、M_1 の最短測地線は M_2 においても最短である。特に、M_1 の階数が M_2 の階数に等しいならば (1) が成り立つ。

系 4.2 コンパクト Riemann 対称空間の極大階数全測地的部分多様体は凸である。

5　主定理

定理 5.1 (Quast-田中 [26]) 対称 R 空間の鏡映部分多様体は凸である。

証明には命題 4.1 と次の田中-田崎の結果を使う。

命題 5.2 (Loos [19], 田中-田崎　[31]) M_2 を対称 R 空間とし、$o \in M_2$ を原点とする。τ を M_2 の対合的等長変換で $\tau(o) = o$ を満たすものとする。M_1 を τ による不動点集合の o を含む連結成分とする。命題 4.1 のように $\mathfrak{m}_i$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$ を満たすように取る。このとき、$\mathfrak{a}_2$ の直交基底 $e_1, \dots, e_r$ で次の条件を満たすものが存在する。

(i) $\Gamma(M_2, \mathfrak{a}_2) := \{X \in \mathfrak{a}_2 \mid \operatorname{Exp}_o X = o\} = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{e_1, \dots, e_r\}$,

(ii) $^\exists p, q \in \mathbb{Z},\ 0 \le 2p \le q \le r,$ s.t. $\begin{cases} (d\tau)_o(e_{2j}) = e_{2j-1} & (1 \le j \le p) \\ (d\tau)_o(e_j) = e_j & (2p+1 \le j \le q) \\ (d\tau)_o(e_j) = -e_j & (q+1 \le j \le r) \end{cases}$

(iii) $\mathfrak{a}_1 = \left\{ \sum_{j=1}^r x_j e_j \mid x_{2j-1} = x_{2j}\ (1 \le j \le p),\ \ x_{q+1} = \cdots = x_r = 0 \right\}.$

定理 5.1 の証明の概略を述べる。M_2 を対称 R 空間、M_1 をその鏡映部分多様体とする。$i = 1, 2$ に対して M_i の極大トーラス A_i を $A_1 \subset A_2$ を満たすように取る。命題 4.1 により A_1 が A_2 において凸ならば M_1 は M_2 において凸である。したがって、A_1 の任意の 2 点を結ぶ A_2 における最短測地線を A_1 の中で取れることが言えればよい。$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{m}_i$ を M_i に対応する標準分解とし、A_i に対応する極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{m}_i$ を取る。A_1 の任意の 2 点のうち一方は原点 o と仮定してよい。任意の $x \in A_1$ に対して $\mathrm{Exp}_o X = x$ となる $X \in \mathfrak{a}_1$ を取る。$\gamma(t)$ を $\gamma(0) = o, \gamma(1) = x$ を満たす A_2 の最短測地線とすると、ある $\tilde{X} \in X + \Gamma$ に対して $\gamma(t) = \mathrm{Exp}_o t\tilde{X}$ となる。ここで $\Gamma = \{H \in \mathfrak{a}_2 \mid \mathrm{Exp}_o H = o\}$ は A_2 の単位格子である。このとき、命題 5.2 により Γ は $\mathfrak{a}_2$ の直交基底 $e_1, \dots, e_r$ によって生成され、$\mathfrak{a}_1$ の元は $\sum_{j=1}^r x_j e_j$ ($1 \le j \le p$ に対して $x_{2j-1} = x_{2j}$, $x_{q+1} = \cdots = x_r = 0$) と表される。したがって

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^r (x_j + d_j^0) e_j$$

($1 \le j \le p$ に対して $x_{2j-1} = x_{2j}, x_{q+1} = \cdots = x_r = 0, 1 \le j \le r$ に対して $d_j^0 \in \mathbb{Z}$)

であり

$$d_{M_2}(o, x)^2 = \|\tilde{X}\|^2 = \sum_{j=1}^r (x_j + d_j^0)^2 \|e_j\|^2$$

となるが、$\gamma(t) = \mathrm{Exp}_o t\tilde{X}$ が最短測地線であることから

$$\sum_{j=1}^r (x_j + d_j^0)^2 = \min \left\{ \sum_{j=1}^r (x_j + d_j)^2 \;\middle|\; \sum_{j=1}^r d_j e_j \in \Gamma \right\}$$

となる。$X = \sum_{j=1}^r x_j e_j \in \mathfrak{a}_1$ と各 j に対して $(x_j + d_j^0)^2$ は $(x_j + d_j)^2$ を最小にすることから $\tilde{X} \in \mathfrak{a}_1$ がわかる。よって A_1 は凸である。

定理 5.1 において対称 R 空間の仮定を外すと次のような反例がある。C を $SU(3)$ の中心とし $\pi : SU(3) \to SU(3)/C$ を自然な射影とする。$\tau : SU(3) \to SU(3)$ を複素共役とすると τ は $SU(3)$ の対合的等長変換でその固定点集合は $SO(3)$ である。$SO(3)$ と C は単位元のみを共有するので π の $SO(3)$ への制限は単射であり、$\pi(SO(3))$ は $SO(3)$ に同型である。さらに、τ は C を保つので $SU(3)/C$ の対合的等長変換を誘導し、その固定点集合は $\pi(SO(3))$ である。$SU(3)/C$ は対称 R 空間ではない。そして、このとき $SU(3)/C$ の鏡映部分多様体 $\pi(SO(3)) \cong SO(3)$ は凸ではないことが具体的に測地線を調べることによってわかる。

参考文献

[1] J. Berndt, S. Console and C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, CRC research Notes in Mathematics 434, Chapman & Hall, Boca Raton 2003.

[2] B. -Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces I, Duke Math. J. **44** (1977), 745–755.

[3] B. -Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J. **45** (1978), 405–425.

[4] B. -Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[5] J. -H. Eschenburg and E. Heintze, Extrinsic symmetric spaces and orbits of s-representations, Manuscripta Math. **88** (1995), 517–524.

[6] D. Ferus, Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math. Ann. **247** (1980), 81–93.

[7] O. Ikawa and H. Tasaki, Totally geodesic submanifolds of maximal rank in symmetric spaces, Japan. J. Math. **26** (2000), 1–29.

[8] T. Kimura and M. S. Tanaka, Totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces of rank two, Tokyo J. Math. **31** (2008), 421–447.

[9] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of the complex quadric, Differential Geom. Appl. **26** (2008), 79–96.

[10] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of the complex and the quaternionic 2-Grassmannians, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 4927–4967.

[11] S. Klein, Totally geodesic submanifolds in Riemannian symmetric spaces, *Differential Geometry*, 136–145, Wold Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.

[12] S. Klein, Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2, Osaka J. Math. **47** (2010), 1077–1157.

[13] S. Kobayashi and T. Nagano, On filtered Lie algebras and geometric structures, I, J. Math. Mech. **13** (1964), 875–907.

[14] D. S. P. Leung, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974/75), 327–339.

[15] D. S. P. Leung, Errata:“On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces” (Indiana Univ. Math. J. **24** (1974/75), 327–339), Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 1199.

[16] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds, J. Differential Geom. **14** (1979), 167–177.

[17] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. IV. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom. **14** (1979), 179–185.

[18] O. Loos, Jordan triple systems, R-spaces, and bounded symmetric domains, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 558–561.

[19] O. Loos, Charakteriserung symmetrischer R-Räume durch ihre Einheitsgitter, Math. Z. **189** (1985), 211–226.

[20] T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 428–453.

[21] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, Tokyo J. Math. **11** (1988), 57–79.

[22] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, II, Tokyo J. Math. **15** (1992), 39–82.

[23] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, III, Tokyo J. Math. **18** (1995), 193–212.

[24] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, IV, Tokyo J. Math. **22** (1999), 193–211.

[25] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, V, Tokyo J. Math. **23** (2000), 403–416.

[26] P. Quast and M. S. Tanaka, Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces, preprint.

[27] T. Sakai, On cut loci of compact symmetric spaces, Hokkaido Math. J. **6** (1977), 136–161.

[28] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Ser. I **12** (1965), 81–192.

[29] M. Takeuchi, Basic transformations of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **25** (1988), 259–287.

[30] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[31] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[32] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.

[33] J. A. Wolf, Elliptic spaces in Grassmann manifolds, Illinois J. Math. **7** (1963), 447–462.