5 次元複素射影空間内の調和トーラスの変形について

Tetsuya TANIGUCHI

Abstract

本稿は論文 ([4]) に若干の修正を加えものの解説である．5 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^5$ 内のある種の剛性をもたない調和トーラスを構成する．方法としては M スペクトルデータをもちいて, ある調和トーラスを構成し, その M スペクトルデータをうまく変形することで, 最初の調和トーラスも変形されることを示す．最終的に, $\mathbb{C}P^5$ 内の調和トーラスから $\mathbb{C}P^2$ 内の調和トーラスへ変形される．

1 M スペクトルデータの定義

この節では, Ian McIntosh によって導入された M スペクトルデータ ([2], pp. 516-517) について復習する．

Definition 1 次の条件を満たす三つ組み $(X, \pi, \mathcal{L})$ を M スペクトルデータと呼ぶ．

1. X は完備連結な代数曲線で, *arithmetic genus* が p である;
2. π は X 上の有理関数で, *degree* が $n+1$;
3. $\mathcal{L}$ は X 上の直線束で *degree* が $p+n$;
4. $(X, \pi, \mathcal{L})$ はある実条件をみたす *(cf. §2.1 in [2])*.

Remark 1 おのおのの M スペクトルデータに対して, 複素平面 $\mathbb{C}$ から n 次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ への調和写像 Ψ が対応する．また, 像 $\Psi(\mathbb{C})$ はどの低い次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ $(m < n)$ にも含まれない (cf. [1]).

X がコンパクトリーマン面のときは上記の M スペクトルデータの定義はより簡素化される．

Theorem A(c.f. [3] Theorem 1) X を連結なコンパクトリーマン面とする．三つ組み $(X, \pi, \mathcal{L})$ が M スペクトルデータであるための必要十分条件は次で与えられる:

(M1) X は反正則対合 ρ_X をもつ種数 p のコンパクトリーマン面で, ρ_X による固定点集合を X^ρ とおくとき, $X \setminus X^\rho$ は 2 つの連結成分 X^N, X^S からなる．X^ρ そのものは S^1 の $\nu(X)$ 個のコピー S_1^2, S_2^1, $\cdots$, $S_{\nu(X)}^1$ の disjoint union となる．すなわち, $X^\rho = \coprod_{i=1}^{\nu(X)} S_i^1$.

(M2) π は X 上の degree が $n+1$ の有理型関数で, すべての極が X^N に, すべての零点が X^S に含まれる．さらに, π は 2 位以上の零点 P_0 と, $|\pi(x)| = 1$ かつ $x \in X^\rho$ を満たす点 x をもつ．

(M3) $\mathcal{L}$ は X 上の degree が $p+n$ の複素正則直線束で, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ と因子 D を用いて同一視したとき

$$D + \rho_{X*}(D) \cong R, \quad \delta(\mathcal{L}) = 0,$$

を満たす．ただし, R は π を $\mathbb{P}^1$ への正則写像 $\pi \colon X \to \mathbb{P}^1$ とみなしときの分岐因子とする．さらに $\delta(\mathcal{L})$ は次で定義される非負の整数:

$$\delta(\mathcal{L}) = \nu(X) - |\sharp\{s_i \in \Lambda \mid g(s_i)/g(s_1) > 0\} - \sharp\{s_i \in \Lambda \mid g(s_i)/g(s_1) < 0\}|.$$

ここでは, g は $(g) = D + \rho_{X*}D - R$ を満たす X 上の有理型関数を選び, さらに, $\nu(X)$ 個の点 s_1, s_2, $\cdots$, $s_{\nu(X)}$ で, $s_i \in S_i$, $g(s_i) \neq 0, \infty$ であるような点を選び, その点集合を Λ とおく．(注意: $g(s_i)/g(s_1)$ は正または負の実数である．また, $\delta(\mathcal{L})$ は g と Λ の選び方によらない.)

2 種数 0 の M スペクトルデータ

X が種数 0 のコンパクトリーマン面, すなわち, $X=\mathbb{P}^1=\{\lambda\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}\}$ のときの M スペクトルデータの分類について復習する (cf. [3]). ρ を $\mathbb{P}^1$ 上の $\lambda\mapsto 1/\bar{\lambda}$ によって定義される反正則対合とする.

Theorem B (c.f. [3] Theorem 9) X をリーマン球面とする. このとき, $(X,\pi,\mathcal{L})$ が M スペクトルデータであるための必要十分条件は次で与えられる:

(B1) (X,ρ_X) は $(\mathbb{P}^1,\rho)$ に実同形. また, アフィン座標 λ によって, π は

$$\pi(\lambda)=\alpha_0\lambda^{m+1}\frac{\prod_{j=1}^{n-m}(\lambda-P_j)}{\prod_{j=1}^{n-m}(\lambda-Q_j)},\quad P_0=0,\quad \alpha_0=\frac{\prod_{j=1}^{n-m}(1-Q_j)}{\prod_{j=1}^{n-m}(1-P_j)}$$

で与えられる. ただし, $1\leqq m\leqq n-1$. ここで, $P_j\in X^S=\{\lambda\in X\mid 0<|\lambda|<1\}$ かつ $Q_j=1/\overline{P_j}$ $(1\leqq j\leqq n-m)$.

(B2) $\mathcal{L}$ は degree が n である複素正則直線束.

次に Theorem B の M スペクトルデータに対応する調和写像について紹介する.

Theorem C (c.f. [3] Theorem 10) Theorem B の M スペクトルデータ $(X,\,\pi,\,\mathcal{L}=\mathcal{O}_X(D))$ に対応する調和写像 $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}P^n$ は, 定義域の複素座標を適切にとることにより,

$$z=x+\sqrt{-1}y\mapsto[\psi_0(z):\psi_1(z):\cdots:\psi_n(z)]$$

とあらわされる. ここで, $\psi_i(z)$ は次で与えれる:

$$\psi_i(z)=\exp\left(\eta_i^{-1}z/2-\eta_i\bar{z}/2\right)\cdot\frac{\prod_{j=1}^{n-m}(\eta_i-P_j)}{\prod_{j=1}^{n-m}(\eta_i-R_j)}. \tag{1}$$

ただし, $\{\eta_0,\,\dots,\,\eta_n\}$ は 1 の π による逆像 $\pi^{-1}(1)$ とし, 因子 R を X^S に制限した degree $n-m$ の因子 R_+ を $R_+=\sum_{j=1}^{n-m}R_j$ とおいた.

Example 1 M スペクトルデータ $(X=\mathbb{P}^1,\pi,\mathcal{L})$ を, 次のように選ぶ. $\pi\colon\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, $\lambda\mapsto\lambda^2$. $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}=O_X\left(2(0)\right)$$

で定義し, $P_0=0$ とする. このとき, 対応する調和写像 $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}P^1$ は次で与えられる:

$$z=x+\sqrt{-1}y\mapsto[\psi_0(z):\psi_1(z)],$$

ここで, $\psi_0=\exp(z/2-\bar{z}/2)=\exp(\sqrt{-1}y)$, $\psi_1=\exp(-z/2+\bar{z}/2)=\exp(-\sqrt{-1}y)$. この写像は, 2 つの周期

$$v_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad v_2=2\pi\sqrt{-1}$$

をもつ.

Example 2 M スペクトルデータ $(X=\mathbb{P}^1,\pi,\mathcal{L})$ を, 次のように選ぶ. $\pi\colon\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, $\lambda\mapsto\lambda^4$. $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}=O_X\left(4(0)\right)$$

で定義し, $P_0=0$ とする. このとき, 対応する調和写像 $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}P^3$ は次で与えられる:

$$z=x+\sqrt{-1}y\mapsto[\psi_0(z):\psi_1(z),\psi_2(z):\psi_3(z)],$$

ここで,

$$\psi_0=\exp(z/2-\bar{z}/2)=\exp(\sqrt{-1}y),\quad \psi_1=\exp(\omega^{-1}z/2-\omega\bar{z}/2)=\exp(-\sqrt{-1}x),$$
$$\psi_2=\exp(\omega^{-2}z/2+\omega^2\bar{z}/2)=\exp(-\sqrt{-1}y),\psi_3=\exp(-\sqrt{-1}z/2-1/(-\sqrt{-1})\bar{z}/2)=\exp(\sqrt{-1}x),$$

$\omega=\exp(2\pi\sqrt{-1}/4)$ は原始４乗根. この写像 Ψ は２つの周期

$$v_1=2\pi,\quad v_2=2\pi\sqrt{-1}$$

をもつ.

Example 3 M スペクトルデータ $(X=\mathbb{P}^1,\pi,\mathcal{L})$ を, 次のように選ぶ.

$$\pi(\lambda)=-4\lambda^2\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\lambda^2-4}.$$

degree 3 の複素正則直線束 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}=O_X\left(3(0)\right)$$

で定義し, $P_0=0$ とする. このとき, 対応する調和写像 $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}P^3$ は次で与えられる*:*

$$\Psi=[\psi_0:\psi_1:\psi_2:\psi_3]$$

$$\psi_0=\frac{3+\sqrt{15}}{8}\exp(z/2-\bar{z}/2)=\frac{3+\sqrt{15}}{8}\exp(\sqrt{-1}y),$$
$$\psi_1=\frac{5+\sqrt{15}}{8}\exp(\sqrt{-1}z/2-1/\sqrt{-1}\cdot\bar{z}/2)=\frac{5+\sqrt{15}}{8}\exp(\sqrt{-1}x),$$
$$\psi_2=\frac{3+\sqrt{15}}{8}\exp(-z/2+\bar{z}/2)=\frac{3+\sqrt{15}}{8}\exp(-\sqrt{-1}y),$$
$$\psi_3=\frac{5+\sqrt{15}}{8}\exp(-\sqrt{-1}z/2-1/(-\sqrt{-1})\cdot\bar{z}/2)=\frac{5+\sqrt{15}}{8}\exp(-\sqrt{-1}x).$$

この写像 Ψ は２つの周期

$$v_1=2\pi,\quad v_2=2\pi\sqrt{-1}.$$

をもつ.

Example 4 M スペクトルデータ $(X=\mathbb{P}^1,\pi,\mathcal{L})$ を, 次のように選ぶ. $\pi\colon\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, $\lambda\mapsto\lambda^6$. *degree* 5 の複素正則直線束 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}=O_X\left(5(0)\right)$$

で定義し, $P_0=0$ とする. このとき, 対応する調和写像 $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}P^5$ は次で与えられる*:*

$$z=x+\sqrt{-1}y\mapsto[\psi_0(z):\psi_1(z):\psi_2(z):\psi_3(z):\psi_4(z)\colon\psi_5(z)],\tag{2}$$

ここで,

$$\psi_0=\exp(z/2-\bar{z}/2)=\exp\left(\sqrt{-1}y\right),\quad \psi_1=\exp(\omega^{-1}z/2-\omega^1\bar{z}/2)=\exp\left(\frac{-\sqrt{-1}(\sqrt{3}x-y)}{2}\right),$$

$$\psi_2=\exp(\omega^{-2}z/2-\omega^2\bar{z}/2)=\exp\left(\frac{-\sqrt{-1}(\sqrt{3}x+y)}{2}\right),\psi_3=\exp(\omega^{-3}z/2-\omega^3\bar{z}/2)=\exp\left(-\sqrt{-1}y\right),$$

$$\psi_4=\exp(\omega^{-4}z/2-\omega^4\bar{z}/2)=\exp\left(\frac{\sqrt{-1}(\sqrt{3}x-y)}{2}\right),\psi_5=\exp(\omega^{-5}z/2-\omega^5\bar{z}/2)=\exp\left(\frac{\sqrt{-1}(\sqrt{3}x+y)}{2}\right),$$

$\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/6)$ は原始 6 乗根である．この写像 Ψ は 2 つの周期

$$v_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \quad v_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}$$

をもつ.

3 $\mathbb{C}P^5$ 内の調和トーラスの変形

Definition 2 M をリーマン面とし, $\Psi\colon M \to \mathbb{C}P^n$ を調和写像で, 像 $\Psi(M)$ がどの低い次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ $(m < n)$ にも含まれないとする．M_t をリーマン面の族で $M_0 = M$ であるとする．M_t から $\mathbb{C}P^n$ への調和写像の 1 パラメーター族 Ψ_t で, $\Psi_0 = \Psi$ であるものを, Ψ の調和変形とよぶ．特に $M_t = M$ であるような調和変形 Ψ_t を Ψ の拘束調和変形とよぶことにする．

$\mathbb{C}P^n$ の等長変換の任意の 1 パラメーター族 σ_t $(\sigma_0 = id)$ と, M の双正則写像の任意の 1 パラメーター族 f_t $(f_0 = id)$ に対して, $\sigma_t \circ \Psi \circ f_t$ もまた, Ψ の調和変形であることに注意しよう．そのような調和変形を自明な調和変形と呼ぶことにする．

Definition 3 調和写像 $\Psi\colon M \to \mathbb{C}P^n$ で, 自明でない調和変形 (*resp.* 拘束調和変形) を持たないとき, Ψ は *rigid* (*resp. c-rigid*) と呼ばれる．

c-rigid でなければ rigid ではないが, 逆はなりたたないことに注意しよう．$1 \leqq n \leqq 2$ のとき, $\mathbb{C}P^n$ 内においては自明な調和変形をもつ調和トーラスがあり, それらは rigid でない ([3])．$\mathbb{C}P^3$ 内のクリフォードトーラスは拘束調和変形をもち, ゆえにそれは c-rigid ではない (cf. [5])．他の c-rigid でない調和トーラスの存在についてはどうであろうか?

Theorem 1 $\mathbb{C}P^5$ 内の *c-rigid* でない調和トーラスが存在する．

Proof. t をパラメーターとする M スペクトルデータの 1 パラメーター族 $(X = \mathbb{P}^1, \pi, \mathcal{L})$ を, 次のように選ぶ.

$$\begin{aligned}\pi(\lambda) &= \frac{(t-\eta_1)(t-\eta_3)(t-\eta_5)}{(1-t\eta_1)(1-t\eta_3)(1-t\eta_5)}\lambda^3 \frac{(\lambda - t\eta_1)(\lambda - t\eta_3)(\lambda - t\eta_5)}{(t\lambda - \eta_1)(t\lambda - \eta_3)(t\lambda - \eta_5)} \\ &= \frac{(1-\eta_1/t)(1-\eta_3/t)(1-\eta_5/t)}{(1-t\eta_1)(1-t\eta_3)(1-t\eta_5)}\lambda^3 \frac{(\lambda - t\eta_1)(\lambda - t\eta_3)(\lambda - t\eta_5)}{(\lambda - \eta_1/t)(\lambda - \eta_3/t)(\lambda - \eta_5/t)}, \quad (-1 < t < 1)\end{aligned}$$

degree 5 の複素正則直線束 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = O_X\,(5(0))$$

で定義し, $P_0 = 0$ とする．このとき, これらは Theorem B の条件 (B1) と (B2) を満たし, 対応する調和写像 $\Psi_t\colon \mathbb{C} \to CP^5$ は次で与えられる:

$$\Psi_t = [\psi_0 : \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4 : \psi_5],$$

ここで,

$$\begin{gathered}\psi_i = \alpha_i e_i, \quad e_i = \exp(\eta_i^{-1} z/2 - \eta_i \bar{z}/2), \quad \eta_i = \exp(i \times 2\pi\sqrt{-1}/6), \\ \alpha_i = \frac{\eta_i - t\eta_1}{\eta_i - \alpha\eta_1}\frac{\eta_i - t\eta_3}{\eta_i - \alpha\eta_3}\frac{\eta_i - t\eta_5}{\eta_i - \alpha\eta_5}, \ \alpha = \frac{t^3}{1+\sqrt{1-t^6}} \quad (0 \leqq i \leqq 5).\end{gathered} \tag{3}$$

これらの写像 Ψ_t $(-1 \leqq t \leqq 1)$ は共通の 2 つの周期

$$v_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \quad v_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}$$

をもつ．ゆえに, Ψ_t は トーラス $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2)$ からの写像となる．また, Ψ_0 は Example 4 の Ψ と一致する．よって, $\mathbb{C}P^5$ 内の拘束調和変形をもつ調和トーラスが存在する．後はこの拘束調和変形が自明でないことを示せばよい．

Ψ_t $(-1 < t < 1)$ は, Section 1 の Remark 1 によって, 低い次元の $\mathbb{C}P^m$ $(m \leqq 4)$ に含まれないことに注意する．ところが, t を 1 または -1 に近づけたとき, Ψ_t は $\mathbb{C}P^2$ 内に含まれてしまう．実際, $\Psi_{\pm 1} = \lim_{t \to \pm 1} \Psi_t$ とおくと,

$$\Psi_1 = [e_0 : 0 : e_2 : 0 : e_4 : 0], \quad \Psi_{-1} = [0 : e_1 : 0 : e_3 : 0 : e_5].$$

したがって, Ψ_1 and Ψ_{-1} の像は, $\mathbb{C}P^5$ の任意の等長変換 σ に対しても, $\sigma \circ \Psi$ の像とは違う．ゆえに, Ψ_t は自明ではなく, Ψ は c-rigid でないことがわかり, Theorem 1 の証明が完成したことになる． $\square$

実は, 極限の $\Psi_{\pm 1}$ は $\mathbb{C}P^2$ 内の調和トーラスとなる． これを示すために, M スペクトルデータ $(X = \mathbb{P}^1, \pi, \mathcal{L})$ を次のように選ぶ. $\pi(\lambda) = \lambda^3$. degree 2 の複素正則直線束 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = O_X\,(2(0))$$

で定義し, $P_0 = 0$ とする．この M スペクトルデータは Theorem B の条件 (B1) と (B2) を満たし, 対応する調和写像 $\Psi\colon \mathbb{C} \to CP^2$ は次で与えられる:

$$\Phi = [\phi_0 : \phi_1 : \phi_2],$$

ここで,

$$\phi_0 = \exp(\eta_0^{-1} z/2 - \eta_0 \bar{z}/2), \quad \phi_1 = \exp(\eta_2^{-1} z/2 - \eta_2 \bar{z}/2), \quad \phi_2 = \exp(\eta_4^{-1} z/2 - \eta_4 \bar{z}/2).$$

(3) の e_i をもちいると, $\Phi = [e_0 : e_2 : e_4]$ となる．この写像 Ψ_t $(-1 \leqq t \leqq 1)$ は 2 つの周期

$$v_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \quad v_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}$$

をもつ. $\mathbb{C}P^2$ から $\mathbb{C}P^5$ への等長埋め込み ι_1 and ι_{-1} を

$$\iota_1\colon [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : 0 : x_1 : 0 : x_2 : 0], \quad \iota_{-1}\colon [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [0 : x_0 : 0 : x_1 : 0 : x_2]$$

で定義すると, $\Psi_1 = \iota_1 \circ \Phi$, $\Psi_{-1} = \iota_{-1} \circ \Phi \circ R$, ここで, R は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像で, $z \mapsto -z$ 定義した. よって, Ψ_1 と Ψ_{-1} は本質的に $\mathbb{C}P^2$ 内の調和トーラスとなる．すなわち, $\mathbb{C}P^5$ 内の調和トーラスから $\mathbb{C}P^2$ 内の調和トーラスへの自明でない拘束調和変形の存在が示されたことになる．

References

[1] I. McIntosh, *A construction of all non-isotropic harmonic tori in complex projective space*, Internat. J. Math. 6 (1995), 831-879.

[2] I. McIntosh, *Two remarks on the construction of harmonic tori in* $\mathbb{C}P^n$, Internat. J. Math. 7 (1996), 515-520.

[3] T. Taniguchi, *"Non-isotropic harmonic tori in complex projective spaces and configurations of points on Riemann surfaces"*
Tohoku Mathematical Publications 14, 1999

[4] T. Taniguchi *"A deformation of harmonic torus in* 5*-dimensional complex projective space"*,
北里大学一般教育紀要, 第 16 号 (2011), 39-46

[5] T. Taniguchi, *"A deformation of Clifford torus"*
Preprint

E-mail address: tetsuya@kitasato-u.ac.jp