

凸多面体の展開の再折り凸多面体

伊藤 仁一 (熊本大学教育学部)

Joint work with (奈良 知恵, Erik Demaine, Martin Demaine, Anna Lubiw,
Joseph O'Rourke, 柴尾有星・高木淳・濱智大・山下雄太郎・山下進太郎)

立方体の辺を切ることによってできる展開図は11種類知られており, そのうちラテンクロスといわれる展開図については, E. Demaine J. O' Rourke によって書かれた有名な本「幾何的な折りアルゴリズム([1])」において, その展開図の境界を張り合せることによって再構成される凸多面体(再折り凸多面体)を全て調べた結果が紹介されている.

展開の仕方(例えば, 辺に沿った切り開き)を制限したときには, 結果はどのようになるであろうか. ここでは, 研究結果[2]について報告するとともに, 未解決問題について述べる. また, 熊本大学教育学部の学部生に調べてもらった立方体の辺による展開の再折り凸多面体のリストを添付する[3].

定義: 凸多面体 P について, P のどんな展開図 T を再折りしても P と合同になるとき, P をrefold-rigid とよび, そうでないとき, P をtransformer とよぶ. P のどんな edge-unfolding (辺に沿った切り開きの展開図) T を再折りしても P と合同になるとき, P をedge-unfold-rigid とよび, そうでないとき, edge-unfold transformer とよぶ.

定理 1. 任意の凸多面体はtransformerである.

正十二面体以外の正多面体はすべてedge-unfold transformerであることは比較的容易に示される.

補題. 凸多面体 P の任意の面の最小角を θ_{\min} とし, P の任意の頂点の最大曲率を κ_{\max} とする. もし, $\theta_{\min} > \kappa_{\max}$ ならば, P のedge-unfoldはrefold-rigidである, すなわち, P の任意のedge-unfoldについて, 再折りによる凸多面体は P と合同である.

定理 2. 準正多面体のうち, 正四面体, 立方体, 正八面体, 正二十面体, 切頭正四

面体, および切頭立方体は edge-unfold transformer である. その他の準正多面体はすべて edge-unfold-rigid である.

この結果を用いると, 多くの準正多面体が edge-unfold-rigid であることが示される. 一般の四面体について, 次が成り立つ.

定理 3. 任意の四面体は edge-unfold transformer である.

次のような未解決問題が考えられる.

1. 多面体の星展開(star unfolding)は rigidity に関する自然な展開の仕方である.
(ほとんど) すべての多面体について, ほとんどすべての星展開は refold-rigid であるか.
2. 次のうち (もしどちらか一方とすれば) どちらが成立するか.
 - (a) ほとんどすべての多面体は edge-refold rigid である.
 - (b) ほとんどすべての多面体は edge-refold transformer である.

ラテックロス以外の立方体の辺による展開の再折り凸多面体の分類を行った.

定理 4. 立方体の辺による展開の全ての再折り凸多面体は図 1 のように分類される. 立体の詳細については, 図 2, 3, 4 の一覧表に載せる.

参考文献

- [1] E. D. Demaine and J. O'Rourke. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. Cambridge University Press, July 2007.
邦訳「幾何的折りアルゴリズム—リンケージ, 折り紙, 多面体—」上原隆平訳, 近代科学社, 2009年.
- [2] E. D. Demaine, M. L. Demaine, J. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, and J. O'Rourke, Refold rigidity of convex polyhedra. In Proceedings of EuroCG 2012
Extended Abstract: Full paper is available at <http://maven.smith.edu/~orourke>
- [3] 伊藤仁一, 奈良知恵, 柴尾有星, 高木淳, 濱智大, 山下雄太郎, 山下進太郎, 正多面体の辺による展開の再折り凸多面体—立方体を中心として—, 熊本大学教育学部紀要, 第61号, 65-74, (2012).

展開図		展開図	
	立方体, 五面体②, 五面体③, 八面体②, 八面体⑧, 台形①, 六角形①		立方体, 四面体①, 四面体③, 四面体④, 五面体①, 五面体②, 六面体①, 六面体③, 六面体④, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形⑤, 五角形①,
	立方体, 四面体①, 四面体⑩, 五面体②, 五面体③, 六面体⑤, 八面体②, 八面体③, 八面体⑧, 長方形①, 台形①, 台形⑤, 六角形①, 回転ペルトによる無限の四面体		立方体, 四面体②, 四面体③, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑨, 四面体⑩, 四面体⑪, 五面体①, 六面体②, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形①, 長方形②, 長方形③, 長方形④, 台形②, 台形④, 台形⑤, 平行四辺形①, 平行四辺形②, 円柱状の回転ペルトによる無限の四面体
	立方体, 四面体③, 四面体⑤, 四面体⑧, 四面体⑩, 四面体⑫, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体③, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 台形④, 五角形①,		立方体, 四面体①, 四面体②, 四面体③, 四面体④, 四面体⑤, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑩, 五面体①, 五面体②, 六面体②, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑩, 六面体⑫, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形①, 長方形③, 台形①, 台形②, 台形④, 台形⑤, 平行四辺形②, 五角形①,
	立方体, 四面体③, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑨, 四面体⑪, 五面体②, 五面体③, 六面体②, 六面体③, 六面体⑤, 六面体⑦, 五面体③, 八面体①, 八面体②, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形③,		立方体, 四面体①, 四面体④, 五面体②, 六面体⑦, 八面体①, 八面体②, 八面体⑧, 長方形①, 長方形②, 長方形③, 長方形④, 台形①, 平行四辺形①, 六角形① 円柱状の回転ペルトによる無限の四面体
	立方体, 四面体①, 四面体②, 四面体⑤, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体③, 六面体④, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑨, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形②, 平行四辺形②,		立方体, 四面体③, 五面体①, 五面体②, 六面体③, 六面体⑥, 八面体①, 八面体②, 八面体③, 八面体⑦, 八面体⑧, 長方形②, 台形①, 台形②, 平行四辺形①, 平行四辺形②, 五角形①,
	立方体, 四面体④, 四面体⑦, 四面体⑧, 四面体⑩, 四面体⑫, 四面体⑬, 五面体①, 五面体②, 五面体③, 六面体⑤, 六面体⑥, 六面体⑦, 六面体⑨, 八面体①, 八面体②, 八面体⑦, 八面体⑧, 台形①, 台形⑤		

図1 立方体の辺による展開図の再折り凸多面体
























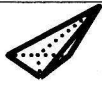

	立体を構成する面 0 内はもとの立体の一边を1としたときの長さ		立体を構成する面 0 内はもとの立体の一边を1としたときの長さ
 立方体	・正方形 (1, 1, 1, 1) が6つ	 五面体①	・四角形 (1, 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$) が1つ ・三角形 ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, 3) が2つ ・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$) が2つ
 四面体①	・二等辺三角形 ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$) が4つ	 五面体②	・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$) が1つ ・等脚台形 ($\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2}$) が1つ ・直角三角形 ($\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$) が1つ ・直角を含む台形 (1, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$) が1つ
 四面体②	・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$) が2つ ・三角形 (2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$) が2つ	 五面体③	・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{5}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{5}$) が1つ
 四面体③	・二等辺三角形 (2, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$) が4つ	 六面体①	・二等辺三角形 (2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$) が6つ
 四面体④	・三角形 ($\frac{\sqrt{37}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{5}{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{37}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 3) が1つ ・三角形 ($\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1}{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{5}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 3) が1つ	 六面体②	・三角形 (1, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5}{2}$) が2つ ・三角形 (1, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{5}{2}$) が2つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{2}$) が2つ
 四面体⑤	・三角形 ($\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{3}{2}$) が4つ	 六面体③	・直角三角形 (1, 1, $\sqrt{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$) が1つ ・直角三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3}{2}$) が1つ ・二等辺三角形 ($\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, 1) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{2}$) が1つ
 四面体⑥	・正三角形 (1, 1, 1) が1つ ・二等辺三角形 (1, $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$) が1つ ・三角形 (1, 2, $\sqrt{7}$) が2つ		
 四面体⑦	・二等辺三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 2) が1つ ・二等辺三角形 ($\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{29}}{2}$, 2) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $2\sqrt{2}$) が2つ	 六面体④	・直角三角形 ($\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2) が2つ ・三角形 ($\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$) が2つ ・三角形 ($\frac{5}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, 2) が2つ
 四面体⑧	・三角形 ($\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 2) が4つ	 六面体⑤	・三角形 ($\frac{5}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sqrt{2}$) が2つ ・三角形 (2, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$) が2つ ・三角形 ($\frac{5}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2}$) が2つ
 四面体⑨	・二等辺三角形 ($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{61}}{2}$, $\frac{\sqrt{61}}{2}$) が1つ ・三角形 (1, $\frac{\sqrt{61}}{2}$, $\frac{\sqrt{61}}{2}$) が2つ ・二等辺三角形 ($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{85}}{2}$, $\frac{\sqrt{85}}{2}$) が1つ	 六面体⑥	・直角三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1) が1つ ・三角形 ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{5}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{5}$) が1つ ・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$) が1つ ・三角形 ($\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{5}$) が1つ
 四面体⑩	・二等辺三角形 (1, $\frac{\sqrt{37}}{2}$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$) が4つ		
 四面体⑪	・三角形 ($\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{37}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$) が1つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sqrt{2}$) が1つ	 六面体⑦	・二等辺三角形 (2, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$) が2つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 1) が2つ ・三角形 ($\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 2) が2つ
 四面体⑫	・三角形 ($\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $2\sqrt{2}$) が4つ	 六面体⑧	・正三角形 (1, 1, 1) が2つ ・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{3}$) が2つ ・二等辺三角形 (1, 1, $\sqrt{3}$) が2つ
 四面体⑬	・直角三角形 (1, 2, $\sqrt{5}$) が2つ ・三角形 (2, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$) が2つ		

図2 再折り凸多面体の一覧表 (1)












	立体を構成する面 ()内はもとの立体の一边を1としたときの長さ		立体を構成する面 ()内はもとの立体の一边を1としたときの長さ
 六面体⑨	<ul style="list-style-type: none"> 直角三角形 $(\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{5}{2}, 1)$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{5})$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}, \sqrt{5})$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2})$ が1つ 三角形 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2})$ が1つ 三角形 $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ が1つ 	 八面体⑤	<ul style="list-style-type: none"> 正三角形 $(1, 1, 1)$ が6つ 二等辺三角形 $(1, 1, \sqrt{3})$ が2つ
 六面体⑩	<ul style="list-style-type: none"> 直角三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ が1つ 三角形 $(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2})$ が1つ 三角形 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{34}}{2})$ が1つ 三角形 $(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{5})$ が1つ 三角形 $(1, 2\sqrt{2}, \sqrt{5})$ が1つ 	 八面体⑥	<ul style="list-style-type: none"> 二等辺三角形 $(1, 1, \sqrt{3})$ が8つ
 八面体①	<ul style="list-style-type: none"> 直角二等辺三角形 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ が2つ 直角三角形 $(1, 2, \sqrt{5})$ が2つ 直角二等辺三角形 $(1, 1, \sqrt{2})$ が4つ 	 八面体⑦	<ul style="list-style-type: none"> 直角三角形 $(1, 2, \sqrt{5})$ が2つ 三角形 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{5})$ が2つ 直角三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ が2つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{10})$ が2つ
 八面体②	<ul style="list-style-type: none"> 直角二等辺三角形 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ が2つ 直角三角形 $(\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ が1つ 直角二等辺三角形 $(1, 1, \sqrt{2})$ が1つ 二等辺三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$ が1つ 直角三角形 $(\frac{\sqrt{26}}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{26}}{2})$ が1つ 三角形 $(\sqrt{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2})$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, 1)$ が1つ 	 八面体⑧	<ul style="list-style-type: none"> 直角を含む台形 $(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ が2つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \sqrt{5})$ が2つ 直角三角形 $(\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ が2つ
 八面体③	<ul style="list-style-type: none"> 直角三角形 $(\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ が2つ 二等辺三角形 $(\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, 1)$ が1つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2})$ が2つ 二等辺三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$ が1つ 直角二等辺三角形 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ が2つ 	 正八面体	<ul style="list-style-type: none"> 正三角形 $(1, 1, 1)$ が8つ
 八面体④	<ul style="list-style-type: none"> 直角三角形 $(1, 2, \sqrt{5})$ が2つ 三角形 $(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}, 1)$ が2つ 直角三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ が2つ 三角形 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}, \sqrt{10})$ が2つ 		

図3 再折り凸多面体の一覧表(2)













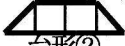



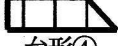


被覆な平面	もとの立体の一边を1としたときの長さ	被覆な平面	もとの立体の一边を1としたときの長さ
 長方形①	$(1, 1, 3, 3)$ が2つ	 平行四辺形①	$(1, 1, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ が2つ
 長方形②	$(2, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ が2つ	 平行四辺形②	$(3, 3, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 長方形③	$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ が2つ	 平行四辺形③	$(2, 2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 長方形④	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ が2つ	 平行四辺形④	$(1, 1, 2, 2)$ が2つ
 長方形⑤	$(1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ	 平行四辺形⑤	$(1, 1, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ が2つ
 台形①	$(2, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ が2つ	 ひし形①	$(1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ が2つ
 台形②	$(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ が2つ	 五角形①	$(1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形③	$(1, 1, \sqrt{3}, 3)$ が2つ	 五角形②	$(1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形④	$(1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \sqrt{2})$ が2つ	 六角形①	$(1, 1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ が2つ
 台形⑤	$(2, 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ が2つ		

図4 再折り凸多面体の一覧表 (3)