Two-point homogeneous カンドルと cyclic type カンドルの関係について

東京理科大学大学院理工学研究科修士課程 2 年 岩永　翔

カンドル代数とは結び目理論における Reidemeister 変形に由来される 3 つの公理を満たす 2 項演算をもつ集合のことで, Joyce によって [1] で導入された．カンドルは Riemann 対称空間と関係がある．ここで Riemann 対称空間とは任意の $x \in M$ に対して, 点対称と呼ばれる M 上の等長変換 s_x を持つ Riemann 多様体 M のことである．Joyce は連結 Riemann 対称空間がカンドルになることを発見した．そこでカンドルを「離散的な対称空間」ととらえて, Riemann 対称空間の離散版を構築していこうという新たな試みが田丸氏によって問題提起された．そこで対称空間の中でも比較的構造が分かりやすいランク 1 対称空間の離散版を作ることから考えるのは自然であるが, カンドルにランクの概念を定義するのは難しい．実は, two-point homogeneous Riemann 多様体といわれるものがランク 1 対称空間または $\mathbb{R}^n$ と等長的であることが知られている．そして, two-point homogeneous Riemann 多様体の離散版である two-point homogeneous カンドルはカンドル構造を用いて定義することが可能である．この two-point homogeneous カンドルにある条件を与えると, cyclic type という巡回置換のみを使って定義されるとても簡単なクラスと同値になることが知られている．本講演ではこの two-point homogeneous カンドルと cyclic type カンドルの関係について新しく得られた結果を述べる.

定義 1. *X を空でない集合とし, $*$ を X 上の 2 項演算とする．次の 3 つの条件を満たすとき, 組 $(X,*)$ を カンドル という.*
(1) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$,
(2) 任意の $x, y \in X$ に対して, ある $z \in X$ が一意的に存在して, $z * y = x$,
(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

$(X,*)$ がカンドルであるとき, $*$ を カンドル構造 という. カンドルの定義は次のように言い換えることができる.

命題 2. *X を空でない集合とし, 任意の $x \in X$ に対して, 写像 $s_x : X \to X$ が与えられているとする．このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $y * x := s_x(y)$ で定義される 2 項演算 $*$ がカンドル構造であるための必要十分条件は, 次の 3 つの条件を満たすことである.*
(1) 任意の $x \in X$ に対して, $s_x(x) = x$,
(2) 任意の $x \in X$ に対して, s_x は全単射 ,
(3) 任意の $x, y \in X$ に対して, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

以後, 命題 2 をカンドルの定義と思うことにする．このとき,

$$s : X \to \mathrm{Map}(X,X) : x \mapsto s_x$$

で定義される写像 s をカンドル構造とし, 組 (X,s) でカンドルを表す.

例 3. $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．$\Lambda_n := \mathbb{Z}_n[t^{\pm 1}]$ を Laurent 多項式環とし, J をそのイデアルとする．また, $X = \Lambda_n/J$ とし,

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対して}, s_x(y) = ty + (1-t)x$$

とする．このとき, (X,s) を アレキサンダーカンドル という.

命題 4 ([1])**.** 任意の連結 Riemann 対称空間はカンドルである.

証明. 連結 Riemann 対称空間の点対称 s_x について命題 2 の 3 条件をチェックする. (1) は x が s_x の不動点であることから分かり, (2) は s_x が対合的であることから分かる. (3) は点対称の性質としてよく知られているものである. □

定義 5. 連結 Riemann 多様体 (M,g) が *two-point homogeneous* であるとは, $d(x_1,x_2)=d(y_1,y_2)$ なる任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in M\times M$ に対して, ある $f\in \mathrm{Isom}(M,g)$ が存在して, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ となることである.

冒頭でも述べたが, two-point homogeneous Riemann 多様体はランク 1 対称空間または $\mathbb{R}^n$ と等長的であることが知られている. それが次の定理である.

定理 6. 連結 Riemann 対称空間 (M,g) に対して, 以下の 3 つは同値.
(1) (M,g) は *two-point homogeneous* である ,
(2) (M,g) はイソトロピックである ,
(3) (M,g) は $\mathbb{R}^n$ or ランク 1 対称空間に等長的である.

定義 7 ([2])**.** カンドル (X,s) が *two-point homogeneous* であるとは, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ なる任意の $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X$ に対して, ある $f\in \mathrm{Inn}(X,s)$ が存在して, $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$ となることである. ここで, $\mathrm{Inn}(X,s):=\langle\{s_x \mid x\in X\}\rangle$ とし, これを (同型の定義は詳しく述べていないが) 内部自己同型群と呼ぶ.

定義 8 ([2])**.** 位数が $n(\geq 3)$ のカンドル (X,s) が *cyclic type* であるとは, 任意の $x\in X$ に対して, s_x が $X\setminus\{x\}$ に位数 $(n-1)$ の巡回置換として作用することである.

命題 9 ([2])**.** 任意の *cyclic type* カンドルは *two-point homogeneous* カンドルである.

一般的に命題 9 の逆が成り立つかどうかは知られていないが, ある条件のもとでは逆が成り立つことを田丸氏は示した. それが次の定理である.

定理 10 ([2])**.** 位数が $p, p+1$ の *two-point homogeneous* カンドルは *cyclic type* カンドルである. ただし, p は奇素数とする.

田丸氏が示した位数 $p, p+1$ 以外にも位数に関して次のことが成り立つことが分かった.

定理 11. 位数が p^2 の *two-point homogeneous* カンドルは *cyclic type* カンドルである. ただし,p は奇素数とする.

命題 12. 位数が 10 の *two-point homogeneous* カンドルは存在しない.

系 13. 位数 14 以下のとき, *two-point homogeneous* カンドルであることと *cyclic type* カンドルであることは同値である.

さらに, 同値になるための位数以外の条件も与えることができた. それが次の定理である.

定理 14. 連結なアレキサンダーカンドル $X:=\Lambda_n/(t-a)$ に対して, 次の 3 つは同値
(1) X は *two-point homogeneous* である ,
(2) a は $\mathbb{Z}_n\setminus\{0\}$ を生成する ,
(3) X は *cyclic type* である.

参考文献

[1] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle,* J. Pure Appl. Algebra 23 (1982) 37-65.

[2] H. Tamaru, *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality,* preprint.