平均曲率一定曲面論の新展開

劔持　勝衛
東北大学　大学院理学研究科

3 次元ユークリッド空間内の極小曲面はワイエルシュトラス・エンネパー表現公式により関数論と深く関係している。極小曲面の一般化である平均曲率一定曲面はサイン・ゴールドン方程式の解で定まることも良く知られている。このようなことが外側の空間を一般にした場合おきるかどうかを考えて、次を得た。

定理　D をガウス平面 R^2 内の単連結領域、$\overline{M}^2[4\rho]$ を複素 2 次元複素空間形とする。このとき、任意の正数 $b>0$ と調和関数 $f:D\to R$ に対し, D から $\overline{M}^2[4\rho]$ へのはめ込み $x:D\longrightarrow\overline{M}^2[4\rho]$ が存在し，誘導計量に関して x のケーラー角度関数 $=\psi\circ f$, 平均曲率ベクトル H が平行, $|H|=2b$, を満たす，ここで，ψ はある 1 変数関数。

注意　実空間形の場合は D. Hoffman, B. Y. Chen, S. T. Yau (1973/1974) 達の独立になされた研究から上のようなことはおきない.

平行平均曲率ベクトル曲面 (M^2,ds^2) を実 2 次元リーマン多様体，$x:M^2\longrightarrow\overline{M}^2[4\rho]$ を平行平均曲率ベクトル $(\neq 0)$ をもつ等長的はめ込みとする．e_1,e_2 を M^2 上の正規直交系、J をケーラー多様体 $\overline{M}^2[4\rho]$ の概複素構造とするとき，$\cos\alpha:=\langle x_*e_1,Jx_*e_2\rangle$ で定まる実数値関数 α をはめ込み x の**ケーラー角度関数**という.（$\alpha\equiv 0,\pi$ のとき，x は正則写像. $\alpha\equiv\pi/2$ のとき，x は全実写像である.）　ケーラー角度関数 α は定数でないとして一般性を失わない．平均曲率ベクトルがゼロでなく平行であることから，$x(M^2)$ に沿って $\overline{M}^2[4\rho]$ 上にある正規直交系が存在し、それらに関してはめ込み x の構造方程式はつぎのようになる.

$$d\alpha=(a+b)\phi+(\bar{a}+b)\bar{\phi},$$
$$K=-4(|a|^2-b^2)+6\rho\cos^2\alpha\ \ (\text{Gauss}),$$

$$
\begin{aligned}
&da \wedge \phi = -(2a(\bar{a}-b)\cot\alpha + \frac{3}{2}\rho\sin\alpha\cos\alpha)\phi\wedge\bar{\phi} \ \text{(Codazzi)},\\
&dc \wedge \bar{\phi} = 2c(a-b)\cot\alpha\phi\wedge\bar{\phi} \ \text{(Codazzi)},\\
&|a|^2 - |c|^2 + \frac{\rho}{2}(-2+3\sin^2\alpha) = 0 \ \text{(Ricci)},
\end{aligned}
$$

ここで，K は (M^2, ds^2) のガウス曲率、ϕ は M^2 上の複素１次微分形式で $ds^2 = \phi\bar{\phi}$, a, c は x の（複素化）第二基本形式の成分である．

仮定　a はケーラー角度関数 α で定まる，i.e., $a = a(\alpha)$ と仮定する．

この仮定を満たす例として**平川曲面**[1] がある．平川曲面は、ポアンカレ平面 $RH^2[-2b^2]$ から複素２次元双曲型複素空間形 $CH^2[-12b^2]$ への平均曲率ベクトル平行な完備等長的はめ込みである。

上の仮定のもとで a に関するコダッチ方程式は常微分方程式：

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{d\alpha} &= \frac{t_1(\alpha, a(\alpha), \overline{a(\alpha)})}{\overline{a(\alpha)}+b},\\
t_1(\alpha, a, \bar{a}) &:= 2a(\bar{a}-b)\cot\alpha + \frac{3}{2}\rho\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}
$$

になる．c に関するコダッチ方程式は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
c &= \left(|a|^2 + \frac{\rho}{2}(-2+3\sin^2\alpha)\right)^{1/2} e^{i\nu},\\
d\nu &= \frac{1}{2i}\frac{t_2(\alpha, a, \bar{a})\phi - \overline{t_2(\alpha, a, \bar{a})\phi}}{(|a|^2 + \rho/2(-2+3\sin^2\alpha))},\\
t_2(\alpha, a, \bar{a}) &:= 2\cot\alpha(|a|^2 - ba + \frac{3}{4}\rho\sin^2\alpha).
\end{aligned}
$$

ケーラー角度関数 α は２階楕円型偏微分方程式を満たすことが知られているが，今の場合それは

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{z\bar{z}} - F(\alpha)\alpha_z\alpha_{\bar{z}} = 0,\\
&F(\alpha) := \frac{(|a(\alpha)-b|^2 - \rho/2\sin^2\alpha)}{|a(\alpha)+b|^2}\cot\alpha \qquad (*)
\end{aligned}
$$

となる．

[1] S. Hirakawa, Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two dimensional complex space forms, Geom. Dedicata 118(2006)

この方程式は具体的に解くことができ，その解は $\alpha(z,\bar{z})=\psi\circ f(z,\bar{z})$ と書け、ここに $\psi=\psi(t)$ は２階常微分方程式

$$\psi''(t)-F(\psi(t))\psi'(t)^2=0 \qquad (**)$$

を満たし、$f(z,\bar{z})$ は $x(M^2)$ 上の実調和関数である。更に，はめ込み x の第一基本形式 ds^2 は

$$ds^2=\frac{\psi'(f)^2|f_z|^2}{|a(\psi(f))+b|^2}|dz|^2$$

と書き下せる．

以上の解析から定理で述べたはめ込みの作り方は以下のようになる．

定理の証明　任意の正数 $b>0$ と実数 ρ に対し、実変数 t の複素数値関数 $a=a(t)$ を次の常微分方程式

$$\frac{da}{dt}+\frac{2\cot t}{\overline{a(t)}+b}(ba(t)-|a(t)|^2-\frac{3\rho}{4}\sin^2 t)=0$$

の解として取る。式 $(*)$ を使って実数値関数 $F(t)$ を定義し、$\psi=\psi(t)$ を常微分方程式 $(**)$ の解としてとる。最後に、単連結開領域 D 上の調和関数 $f(z,\bar{z})$ $(f_z\neq 0)$ に対し, $\alpha(z,\bar{z})=\psi\circ f(z,\bar{z})$ と定義し,

$$\phi=\frac{\alpha_z}{a(\alpha)+b}dz, \quad (a(\alpha)+b\neq 0),$$

とおく．

補題　$|a(\alpha)|^2+\rho/2(-2+3\sin^2\alpha)\neq 0$ であるとき，

$$\theta:=\frac{1}{2i}\frac{t_2(\alpha,a(\alpha),\overline{a(\alpha)})\phi-\overline{t_2(\alpha,a(\alpha),\overline{a(\alpha)})\phi}}{(|a(\alpha)|^2+\rho/2(-2+3\sin^2\alpha))}$$

は D 上の１次実閉形式である．

上の補題より $d\nu=\theta$ となる D 上の実数値関数 ν がある。この ν を使って、c, ds^2 を定義する：

$$c=\left(|a(\alpha)|^2+\frac{\rho}{2}(-2+3\sin^2\alpha)\right)^{1/2}e^{i\nu}, \quad ds^2=\phi\bar{\phi}.$$

これらの $\{\phi, \alpha, a, c\}$ は Gauss, Codazzi, Ricci の方程式を満たすので定理が証明された．

注意　（１）ここで得られた曲面は $c \neq 0$ である．$c \equiv 0$ の場合が先に引用した平川の論文である．

（２）ν は加法的定数を除いて定義されているので、ν の代わりに t を実数とし、$\nu_t = \nu + t$ としてもよい。よって、x は随伴族 $\{x_t,\ (t \in R)\}$ をもつ。

（３）湯沢研究会 (2012.11) では「いつ $a = a(\alpha)$ となるか？」を問題としてあげたが、これはその後解決された。

謝辞　部分多様体論・湯沢 2012 の出席者の皆さんへ
私の古希に際し，祝宴を開いていただきその上お祝い品まで頂戴したことを深く感謝しております．どうもありがとう．若い友人からの心温まるスピーチとおいしい料理で記憶に残る会食となりました．皆様のますますの発展を心より祈念いたしております. (2013.02)