射影スペシャルケーラー多様体と多重調和写像.

久能 裕一 (首都大学東京 D3)

等質射影スペシャルケーラー多様体

等質射影スペシャルケーラー多様体を定義する前に, まず, スペシャルケーラー多様体について考える.

定義 1 (スペシャルケーラー多様体 [4]) (M, J, g) をケーラー多様体とし, ∇ を捩率が 0 である平坦な M 上の接続とする. (M, J, g, ∇) がスペシャルケーラー多様体であるとは, M のケーラー形式 $\omega := g(\cdot, J\cdot)$ が ∇ に関して平行であり, さらに, 複素構造 J が $d^{\nabla} J = 0$ を満たすことである. ただし, d^{∇} は ∇ によって定まる共変外微分とする.

Remark 2 スペシャルケーラー多様体の余接束は, 自然なハイパーケーラー構造を許容する.

スペシャルケーラー多様体は, 次のように, 部分多様体の視点から見ることもできる. V を $\mathbb{C}^n$ の余接束とし, Ω を V 上の標準的な "複素"シンプレクティック形式, $\tau : V \to V$ を, その固定点集合が $T^*\mathbb{R}^n$ となるような V の実構造とする. このとき, V 上のエルミット形式 γ を $\sqrt{-1}\Omega(\cdot, \tau\cdot)$ で定める.

定義 3 (錐的スペシャルケーラー多様体 [2]) $\mathfrak{C}$ を V にはめ込まれた連結複素多様体とする. $\mathfrak{C}$ が錐的スペシャルケーラー多様体であるとは, $\mathfrak{C}$ が次の条件 *1-4* を満たすことである:
1) $\mathbb{C}^\times \cdot \mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$, (錐的)
2) $\Omega|_{\mathfrak{C}} = 0$, *3)* $\dim V = 2 \dim \mathfrak{C}$, (複素ラグランジアン)
4) $\gamma|_{\mathfrak{C}}$ が非退化.

次の命題によって, 錐的スペシャルケーラー多様体はスペシャルケーラー多様体である.

命題 4 V にはめ込まれた連結複素多様体 $(\mathfrak{C}, J)$ に対して, 次は同値である:
a) $\mathfrak{C}$ が, 定義 *3* の条件 *2-4* を満たす.
b) $(\mathfrak{C}, J, \gamma|_{\mathfrak{C}}, \nabla)$ がスペシャルケーラー多様体である.
ただし ∇ は, はめ込みによって V から誘導される接続である.

定義 5 (射影スペシャルケーラー多様体 [1]) M が射影スペシャルケーラー多様体であるとは, $M = \mathfrak{C}/\mathbb{C}^\times$ なる錐的スペシャルケーラー多様体 $\mathfrak{C}$ が存在することである.

射影スペシャルケーラー多様体が等質空間であるとき, 等質射影スペシャルケーラー多様体と呼ぶ. 単純リー群の軌道として表される等質射影スペシャルケーラー多様体は 7 種類しかないことが, [1] で示されている.

多重調和写像

定義 6 (多重調和写像) M を複素多様体, N をリーマン多様体とする. 写像 $F: M \to N$ が多重調和写像であるとは, 任意の M 上の正則曲線 C に対して $F|_C$ が調和写像となることである.

複素 r 次元の射影スペシャルケーラー多様体 M の開集合 U に対して, 多重調和写像となる写像 $F: U \to \mathrm{Gr}^{Lag}_{r+1}\mathbb{C}^{2r+2}$ が存在することが知られている. 以下, M が等質空間である場合に, この多重調和写像となる写像 F の構成について述べる.

G をコンパクト半単純リー群, $\theta: G \to U_{n+1}$ を G の既約ユニタリ表現とする. また, 最高ウェイトベクトルでの射影 G 軌道を G/H とする. これらを用いて, 写像 $f: G/H \to \mathbb{C}P^n$ を定める.

次に, f の持ち上げ $\tilde{f}: G/H \to \mathbb{C}^{n+1}$ を考える. このとき G/H の点 x と 0 以上の整数 k に対して, $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分空間 $\mathfrak{n}_k(x)$, $\mathfrak{t}_k(x)$ を次で定める.

$$\mathfrak{n}_k(x) := \mathrm{span}\left\{ \left(\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} \tilde{f}\right)(x) \;\middle|\; X_1, \dots, X_l \in T_x G/H, 0 \le l \le k \right\}$$
$$\mathfrak{t}_k(x) := \mathfrak{n}_{k-1}^{\perp}(x) \cap \mathfrak{n}_k(x). \qquad (\text{ただし}, \ \mathfrak{t}_0(x) := \mathfrak{n}_0(x) \text{ とする.})$$

これらを用いて, G/H から旗多様体への写像 $x \mapsto \mathfrak{n}_0(x) \subset \dots \subset \mathfrak{n}_K(x) = \mathbb{C}^{n+1}$ を構成することができる.

命題 7 特に G/H が複素 r 次元の等質射影スペシャルケーラー多様体の場合, $\dim \mathfrak{t}_0(x) = \dim \mathfrak{t}_3(x) = 1$, $\dim \mathfrak{t}_1(x) = \dim \mathfrak{t}_2(x) = r$ となり, $x \mapsto \mathfrak{t}_0(x) \oplus \mathfrak{t}_2(x)$ で定められる写像 $F: G/H \to \mathrm{Gr}^{Lag}_{r+1}\mathbb{C}^{2r+2}$ が, 多重調和写像となる.

参考文献

[1] D.V. Alekseevsky, V. Cortés, Classification of stationary compact homogeneous special pseudo-Kähler manifolds of semisimple groups, Proc. London Math. Soc. 81(2000), 211-230.

[2] D.V. Alekseevsky, V. Cortés, C. Devchand, Special complex manifolds, J. Geom. Phys. 42(2002), 85-105

[3] V. Cortés, L. Schäefer, Topological-antitopological fusion equations, pluriharmonic maps and special Kähler manifolds, Prog. in Math. 234 (2005) 59-74

[4] D.S. Freed, Special kähler manifolds, Commun. Math. Phys. 203(1999), 21-52.

[5] M. Guest, Geometry of maps between generalized flag manifolds, J. Differential Geom. 25(1987), 223-247