2重調和部分多様体における一般化されたChen予想について

前田 瞬 (東北大情報 D2)*

概 要

1983 年，Eells-Lemaire により調和写像の一般化である2重調和写像の概念が導入された．この 2 重調和論の中で最も興味深い問題の 1 つに Chen 予想及び一般化された Chen 予想がある．この記録集において，Chen 予想に対しては，immersed submanifold が proper (すなわち，コンパクト集合の preimage もコンパクト) の条件のみで肯定的解決を与えたこと，及び一般化された Chen 予想に対しては，完備リーマン多様体 N，その断面曲率が下から $-L(1+\mathrm{dist}_N(\cdot, q_0)^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ (for some $L>0$, $2>\alpha\geq 0$ and $q_0\in N$) により押さえられているとき，N 内の proper な部分多様体に対して肯定的解決を与えたことを述べる．

1. Chen 予想

$\mathbf{x}: M^m \to \mathbb{E}^n$ を isometric immersion とする．このとき，平均曲率ベクトル場 $\mathbf{H}$ は次のようにかける．

$$\mathbf{H} = \frac{1}{m}\Delta \mathbf{x}.$$

ここに，Δ は (non-positive) Laplacian を表している．このとき，2 重調和部分多様体が定義できる (cf. [4]).

定義 1 (2重調和部分多様体)**.** M^m が $\mathbb{E}^n$ 内の2重調和部分多様体であるとは次を満たすときをいう．

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{m}\Delta^2 \mathbf{x} = 0.$$

注意 1. $\mathbf{H}=0$ のとき，M は極小であるという．

2重調和部分多様体に対し，1988 年 B. Y. Chen 氏は次の予想を発表した (cf. [4]).

予想 1 (Chen 予想)**.** $\mathbb{E}^n$ 内の2重調和部分多様体 M は極小である．

注意 2. 部分多様体 M の完備性は仮定されていない．

Chen 予想に対する主な肯定的結果は以下のとおりである:

1.$\mathbb{E}^3$ 内の曲面 (cf. [4])

2.$\mathbb{E}^4$ 内の超曲面 (cf. [8], [6])

3. 平均曲率一定のとき (cf. [16])

4.M が compact のとき (cf. [9])

本研究は科研費 (課題番号:23・6949) の助成を受けたものである．

* 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号09

e-mail: shun.maeta@gmail.com

web: http://shun-maeta.jimdo.com/

この予想には M の完備性が仮定されておらず局所的な問題であるため M の完備性を仮定し，大域的な問題を考えることは興味深い問題である．まず，2重調和部分多様体の条件より次の補題が得られる．

補題 1. M が $\mathbb{E}^n$ 内の2重調和部分多様体であるとき，次の不等式が成り立つ．

$$\Delta|\mathbf{H}|^2 \geq 2m|\mathbf{H}|^4.$$

従って，Cheng-Yau の generalized maximum principle を用いて $\mathbf{H}=0$ を示すことができる (cf. [5])．しかし，この場合 Ricci 曲率の下からの有界性が必要になり，そのためには第2基本形式のノルムに条件を付けなければならず非常に人工的な条件となる．そこで，proper map の仮定を付けることにより，Cheng-Yau の generalized maximum principle を用いることなく次の結果を得ることができた．

定理 2 ([1])**.** ユークリッド空間内の *proper* な2重調和部分多様体は極小である．

注意 3. *proper* な2重調和部分多様体とは *isometric immersion* $\mathbf{x}: M \to \mathbb{E}^n$ が *proper map* であるときを言う．

proper の仮定は完備性より強いことに注意しておく．

2. 一般化された Chen 予想

$\phi:(M,g)\to(N,h)$ を m 次元リーマン多様体 (M,g) から n 次元リーマン多様体 (N,h) への isometric immersion とする．このとき，2重調和部分多様体の概念は以下のように与えられる．

定義 2. $\phi:(M,g)\to(N,h)$ が2重調和部分多様体であるとは次の方程式を満たすものを言う．

$$\Delta^{\phi}\mathbf{H} + \sum_{i=1}^{m} R^N(\mathbf{H}, d\phi(e_i))d\phi(e_i) = 0,$$

ここに，$\Delta^{\phi} := \sum_{i=1}^{m}(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} - \nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i})$ であり，R^N は N 上の曲率テンソルを表す．すなわち，N 上のベクトル場 X, Y, Z に対して，$R^N(X,Y)Z := [\nabla^N_X, \nabla^N_Y]Z - \nabla^N_{[X,Y]}Z$.

Chen 予想は次のように一般化された．

予想 3. (N,h) をリーマン多様体，その断面曲率 K^N を非正とする．このとき，N 内の2重調和部分多様体は極小である．

一般化された Chen 予想に対しても多くの研究結果がある．主な肯定的結果は以下のとおりである:

1.$\mathbb{H}^3(-1)$ 内の曲面 (cf. [3])

2.$\mathbb{H}^4(-1)$ 内の超曲面 (cf. [2])

3.平均曲率一定のとき (cf. [16])

4.M が compact のとき (cf. [9])

しかし，最近この一般化されたChen予想に対し，Y. L. Ou と L. Tang により反例が与えられた (cf. [17])．これらから，部分多様体の完備性を仮定した次の予想は興味深い問題であるといえる．

予想 4. (N, h) をリーマン多様体，その断面曲率 K^N を非正とする．このとき，N 内の完備 2 重調和部分多様体は極小である．

この予想に対し，N. Nakauchi と H. Urakawa は論文 [15] において次の結果を得ている．

定理 5 ([15]). N をリーマン多様体，その断面曲率 K^N を非正とする．このとき，

$$\int_M |\mathbf{H}|^2 dv_g < \infty,$$

であるならば N 内の完備 2 重調和部分多様体 M は極小．

2 重調和部分多様体の条件から次の補題を得る．

補題 2. N をリーマン多様体，その断面曲率 K^N を非正とする．このとき，$\phi : M^m \to N$ が 2 重調和部分多様体であるならば次の不等式が成り立つ．

$$\Delta |\mathbf{H}|^2 \geq 2m|\mathbf{H}|^4.$$

この補題を用いて次の結果を得た．

定理 6 ([12]). N を完備リーマン多様体，その断面曲率 K^N を非正とする．このとき，K^N が *polynomial growth bound of order* $\alpha < 2$ *from below* を持つならば N 内の *proper* な 2 重調和部分多様体は極小である．

K^N が polynomial growth bound of order α from below を持つとは次を満たすときをいう: 完備リーマン多様体 N, $\alpha \geq 0$ に対し，

$$K^N \geq -L\left(1 + \mathrm{dist}_N\left(\cdot, q_0\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{for some } L > 0 \text{ and } q_0 \in N.$$

これより特に次の系を得る．

系 1. $\mathbb{H}^n(-1)$ 内の *proper* な 2 重調和部分多様体は極小である．

[証明の概要]

G. Y. Jiang により M が compact のときは解決されているため (cf. [9])，M は non-compact を仮定する．$x_0 \in M$ において，$\mathbf{H}(x_0) \neq 0$ を仮定して矛盾を導く．次の関数を評価していくことを考える．

$$f(x) = \left(\rho^2 - r(\phi(x))^2\right)^2 u(x), \qquad x \in M \cap \phi^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}_\rho}\right),$$

ここに，$r(\phi(x)) = \mathrm{dist}_N(\phi(x), q_0)$, $(q_0 \in N)$, $u(x) = |\mathbf{H}(x)|^2$, $\overline{\mathbf{B}_\rho} = \{q \in N \mid r(q) \leq \rho\}$.

仮定より ϕ は proper map であるから $M \cap \phi^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}_\rho}\right)$ は compact．また，$x \in M \cap \phi^{-1}\left(\partial\overline{\mathbf{B}_\rho}\right)$ において $f(x)=0$ であるから，f は $p \in M \cap \phi^{-1}\left(\mathbf{B}_\rho\right)$ で最大値 $(f(p)>0)$ をとる．ここで f は N 上の距離関数を含んでいるため，(i)$\phi(p) \notin C(q_0)$ ($C(q_0)$ は q_0 の cut locus) のとき，(ii)$\phi(p) \in C(q_0)$ のときに場合分けをして考える．

(i) のときは p において，$\nabla f=0$, $\Delta f \leq 0$ とできるので，これを評価していくと，N の断面曲率に関する仮定から $c>0$ (c は ρ に依らない) が存在して，

$$f(x_0) \leq f(p) \leq c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}.$$

これより，

$$|\mathbf{H}(x_0)|^2 = u(x_0) \leq \frac{c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}}{\left(\rho^2 - r\left(\phi(x_0)\right)^2\right)^2} \xrightarrow[\rho\nearrow\infty,\ \alpha<2]{} 0.$$

従って，$\mathbf{H}(x_0) \neq 0$ に矛盾．

(ii) の場合は，上述した関数 f を修正することを考える．まず，$\overline{\mathbf{B}_\rho}$ の中心 q_0 と $\phi(p)$ を最短測地線で結び，測地線上において $q' \notin C(q_0)$ をとる．そして，q' を頂点とする $\phi(p)$ の円錐形近傍 $U(q')$ を考える．このとき，q' からの $U(q')$ 上の距離関数を

$$\overline{r}\left(\phi(x)\right) := \mathrm{dist}_{U(q')}\left(\phi(x), q'\right),$$

と定義する．これを用いて f を次のように修正する．

$$\overline{f}(x) := \left(\rho^2 - \left\{r(q') + \overline{r}\left(\phi(x)\right)\right\}^2\right)^2 u(x), \quad x \in M \cap \phi^{-1}\left(U(q')\right).$$

簡単な議論により，

$$\begin{cases} \overline{f}(p) = f(p) \geq f(x) \geq \overline{f}(x), \\ q' \notin C(q_0) \Rightarrow \phi(p) \notin C(q'). \end{cases}$$

あとは (i) と全く同様の手法で矛盾を得ることができる．

参考文献

[1] K. Akutagawa and S. Maeta, *Biharmonic properly immersed submanifolds in the Euclidean spaces*, to appear in Geom. Dedicata.

[2] A. Balmus, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms*, Math. Nachr. **283**, (2010), 1696–1705.

[3] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. **130**, (2002), 109–123.

[4] B.-Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Michigan State University, (1988 version).

[5] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. **104**, (1976), 407–419.

[6] F. Defever, *Hypersurfaces of* $\mathbb{E}^4$ *with harmonic mean curvature vector*, Math. Nachr. **196**, (1998), 61–69.

[7] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, **50**, Amer. Math. Soc, (1983).

[8] T. Hasanis and T. Vlachos, *Hypersurfaces in* $\mathbb{E}^4$ *with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. **172**, (1995), 145–169.

[9] G. Y. Jiang, 2*-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. **7**A, 388–402, (1986); the English translation, Note di Mathematica **28**, (2008), 209–232.

[10] S. Maeta, k-harmonic maps into a Riemannian manifold with constant sectional curvature, Proc. Amer. Math. Soc. **140**, (2012), 1835–1847.

[11] S. Maeta, *Biminimal properly immersed submanifolds in the Euclidean spaces*, J. Geom. Phys. **62**, (2012), 2288-2293.

[12] S. Maeta, *Biminimal properly immersed submanifolds in complete Riemannian manifolds of non-positive curvature*, arXiv:1208.0473 [mathDG].

[13] S. Maeta and H. Urakawa, *Biharmonic Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, to appear in Glasg. Math. J.

[14] N. Nakauchi and H. Urakawa, *Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **40**, (2011), 125–131.

[15] N. Nakauchi and H. Urakawa, *Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold with non-positive curvature*, to appear in Results. Math. doi:10.1007/s00025-011-0209-7.

[16] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) **48**, (2002), no. 2, 237–248 (2003).

[17] Y.-L. Ou and L. Tang, *On the generalized Chen's conjecture on biharmonic submanifolds*, Michigan Math. J. **61**, (2012), 531–542.

[18] S.-T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28**, (1975), 201–228.