例外型単純Lie群とその部分群, そして連結性

宮下敏一 （長野県上田東高等学校）

0. はじめに

本講演は，Lie環に付随した分類結果（数学的背景をもっている）に対して，そのLie環に対応するLie群の実現を行なった結果の報告である．

第１部は，A. Kollross (Darmstadt大学) による例外型 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-対称空間の分類結果 [4] に対して，例外型単連結コンパクト単純Lie群 $G = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ において，異なる２つの対合的自己同型写像 (involution) σ, τ を具体的に与え，それを用いて分類typeの確認を群で行い，それぞれの不動点部分群の共通部分 $G^\sigma \cap G^\tau$ の群構造を決定した．
第２部は，井川 (京都工織大学)・田崎 (筑波大学) による複素Lie環の正規実形に対応するコンパクト型対称空間 G/K 内の最大階数全測地的部分多様体 $G'/(K \cap G')(G'$ は G の最大階数Lie部分群) の分類結果 [5] に対して，G が例外型単連結コンパクト単純Lie群の場合に $K \cap G'$ の群構造を決定した．
また，第３部は例外型単連結コンパクト単純Lie群のある部分群に対して，その連結性の証明の概略を一般論を用いて具体的易しい例で述べる．

さて，これまでLie環に付随した分類結果に群化を試みた論文として，M. Berger[2] の結果に対して，横田の論文 [10], [11], [12]（例外群に関して）が在り，金行 [3] の結果に対して，矢張り横田の論文 [13], [14] 及び宮下-横田の論文 [9]（例外群に関して）が在る．これら群実現は，Lie環からの情報-Cartan部分環，単純root，Dynkin図形等-によってその多くが実現できることと思う．しかし他方に，群の間に準同型写像を定義し，準同型定理を使って群の同型対応を直接与える方法が在ってもよいと思っている．それは数学的に見れば，別の解り方であると言えるかも知れない. そして，甚だ情緒的ではあるが，群を丸ごと扱い初等的手段に依って結果を得る過程は「手でものに触ってその重さ・質感等を直接感じる感触」に似ている感覚が在る．

最後に，近年物理の分野で例外群がいろいろな場面で利用されているようである．特に，例外群が具体的に構成されている [8] の引用度が高いことがそのことを裏付けていると言えよう．今後，物理の分野で例外群に関する具体的結果が今以上に役立つことを期待している．

1. 大域的例外型 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-対称空間

Bucharest で開催された Workshop において，R.Lutz[7] が有限可換群 Γ に対して，Γ-対称空間の概念を古典的対称空間の概念の一般化として紹介した．$\Gamma = \mathbb{Z}_k$ の場合に V.Kac が代数的観点から, J.Ledger, M.Obata が微分幾何的観点から研究し，O.Kowalski, J.Wolf, A.Gray らが，それを k-対称空間という言葉に変えてさらに研究が進められた.

さて，$\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に関しては，Lie 群 G が古典型の場合に Y.Bahturin, M.Goze[1] が，例外型の場合に A.Kollross[4] がそれぞれ独自の方法により分類を完成させた．以下，定義を与え，involution と群化の結果を報告する．

(注．すべての involution の定義を与えるべきところであるが，紙面の制約からできない．[10], [11], [12] を参照.)

○ **定義 ([4])**

等質空間 $G/K : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-対称空間

$\Longleftrightarrow$

1. G : 連結（コンパクト）Lie 群
2. $(G^\sigma \cap G^\tau)_0 \subseteq K \subseteq G^\sigma \cap G^\tau$ であるような $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(G) \setminus \{1\}$ が存在して，$\sigma^2 = \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma, \sigma \neq \tau$ を満たす.

Type	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}(\cong \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\tau)$	Involutions σ, τ	$G^\sigma \cap G^\tau$
G	$\mathfrak{g}_2$	$i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	γ, γ_H	$(U(1) \times U(1)) \cdot \{1, \gamma_C\}$
FI-I-I	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{u}(3) \oplus i\boldsymbol{R}$	γ, γ_H	$(U(1) \times SU(3) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_3 \cdot \{1, \gamma_C\}$
FI-I-II	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1)$	γ, σ	$(Sp(2) \times Sp(1) \times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2$
FII-II-II	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{so}(8)$	σ, σ'	$Spin(8)$
EI-I-II	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(6) \oplus i\boldsymbol{R}$	$\lambda\gamma\gamma_C, \lambda\gamma$	$(SO(6) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_2 \cdot \{1, \gamma_H\}$
EI-I-III	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2)$	$\lambda\gamma, \lambda\gamma\sigma$	$(Sp(2) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2 \cdot \{1, \rho\}$
EI-II-IV	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{sp}(1)$	$\lambda\gamma, \gamma$	$(Sp(3) \times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2$
EII-II-II	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	γ, γ_H	$(SU(3) \times SU(3) \times U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_3 \cdot \{1, \gamma_C\}$
EII-II-III	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(4) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus i\boldsymbol{R}$	γ, σ	$(SU(4) \times Sp(1) \times Sp(1) \times U(1))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4)$
EII-III-III	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(5) \oplus i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	$\gamma, \gamma_H\rho_2$	$(SU(5) \times U(1) \times U(1))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_5)$
EIII-III-III	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(8) \oplus i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	σ, σ'	$(Spin(8) \times U(1) \times U(1))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4)$
EIII-IV-IV	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(9)$	λ, σ	$Spin(9)$

Type	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}(\cong \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\tau)$	Involutions σ, τ	$G^\sigma \cap G^\tau$
EV-V-V	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{so}(8)$	$\lambda\gamma, \iota\gamma_C$	$SO(8)/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, -1\}$
EV-V-VI	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(4) \oplus \mathfrak{su}(4) \oplus i\boldsymbol{R}$	$\lambda\gamma, \lambda\gamma\sigma$	$(SU(4) \times SU(4) \times U(1))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4) \cdot \{1, \gamma'_C\}$
EV-V-VII	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{sp}(4)$	$\lambda\gamma, \iota\gamma$	$Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2 \times \{1, -1\}$
EV-VI-VII	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus i\boldsymbol{R}$	$\lambda\gamma, \gamma$	$(SU(6) \times SU(2) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_{24}$
EVI-VI-VI	$\mathfrak{e}_7$ $\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ $\mathfrak{u}(6) \oplus i\boldsymbol{R}$	γ, σ γ, γ_H	$(Spin(8) \times Spin(4) \times SU(2))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)$ $(U(1) \times U(1) \times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3 \cdot \{1, \gamma_C\}$
EVI-VII-VII	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{so}(10) \oplus i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	$-\sigma, \iota$	$(Spin(10) \times U(1) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_{12}$
EVII-VII-VII	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{f}_4$	ι, λ	$F_4 \times \{1, -1\}$
EVIII-VIII-VIII	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$	σ, σ'	$(Spin(8) \times Spin(8))/(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2)$
EVIII-VIII-IX	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{su}(8) \oplus i\boldsymbol{R}$	$\lambda\omega\gamma, \lambda\omega\gamma\upsilon$	$(SU(8) \times SO(2))/\boldsymbol{Z}_4 \cdot \{1, \delta\iota\}$
EVIII-IX-IX	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1)$	σ, υ	$(Spin(12) \times SU(2) \times SU(2))/\boldsymbol{Z}_4$
EIX-IX-IX	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{e}_6 \oplus i\boldsymbol{R} \oplus i\boldsymbol{R}$	$\upsilon, \iota\omega$	$(E_6 \times SO(2) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_6 \cdot \{1, \delta\lambda\}$

(注．記号 $\cdot$ は半直積を表す)

○ **計算例** (Type EI-I-III の場合)

$*$ Involution を与えて Type の確認

- $\boxed{(E_6)^{\lambda\gamma} \cong Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2 \ \to \text{Type EI}}$ • $\boxed{(E_6)^{\lambda\gamma\sigma} \cong (E_6)^{\lambda\gamma} \cong Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2 \ \to \text{Type EI}}$
- $\boxed{(E_6)^{(\lambda\gamma\sigma)(\lambda\gamma)} = (E_6)^{\sigma} \cong (U(1) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4 \to \text{Type EIII}}$

$\Rightarrow (E_6/(E_6)^{\lambda\gamma}, (E_6/(E_6)^{\lambda\gamma\sigma}, (E_6/(E_6)^{(\lambda\gamma\sigma)(\lambda\gamma)}\,) = (\text{EI, EI, EIII}):$ Type EI-I-III

(参考．$f : (E_6)^{\lambda\gamma} \to (E_6)^{\lambda\gamma\sigma}$, $f(\alpha) = \delta\alpha\delta^{-1}$, $\delta : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$, $\delta(X) = \overline{D}XD$, $D = \mathrm{diag}(1, e_4, e_4)$)

$*$ $G^\sigma \cap G^\tau$ の群構造

- $\boxed{(E_6)^{\lambda\gamma} \cap (E_6)^{\lambda\gamma\sigma} \cong (Sp(2) \times Sp(2))/\boldsymbol{Z}_2 \cdot \{1, \rho\},\ \boldsymbol{Z}_2 = \{(E, E), (-E, -E)\}}$

[証明の概略]

写像を定義する．$\psi : (Sp(2) \times Sp(2)) \cdot \{1, \rho\} \to (E_6)^{\lambda\gamma} \cap (E_6)^{\lambda\gamma\sigma}$

$$\psi((A, B), 1) = \varphi(h(A, B)),\ \ \psi((A, B), \rho) = \varphi(h(A, B))\rho$$

ここに，$\varphi : Sp(4) \to (E_6)^{\lambda\gamma}$, $\varphi(A)X = g^{-1}(A\,g(X)\,A^*)$, $X \in \mathfrak{J}^C$

(注．写像 $g : \mathfrak{J}^C = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{H}^C) \oplus (\boldsymbol{H}^C)^3 \to \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H}^C)_0$ は，[7] 参照)

$$h : Sp(2) \times Sp(2) \to Sp(4),\ \ h(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\rho = \varphi(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}) \in (E_6)^{\lambda\gamma},\ \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \in Sp(4)$$

以下，準同型定理によって上記同型を証明する．

2. 例外型対称空間内の全測地的部分多様体

○定理 ([5])

$M=G/K$ を正規実形に対応するコンパクト対称空間とする．このとき，G の最大階数 Lie 部分群 G' に対して，G' を共役な Lie 部分群に取り替えることにより，$G'/(K\cap G')$ は M 内の最大階数全測地的部分多様体になる. 逆に M 内の最大階数全測地的部分多様体はこのように得られる．$G'/(K\cap G')$ は，正規実形に対応するコンパクト対称空間，または正規実形に対応するコンパクト対称空間と S^1 の積に局所同型になる．

[6] から正規実形に対応する例外型コンパクト対称空間 $M=G/K$ が, 例外型コンパクト Lie 群に対し，夫々１つずつ存在する (下表 $M=G/K$ の列) ので，それを用いて下表の結果を得た．($\mathcal{A}_1$ 等の記号の説明は，[5] 参照．)

G	$M=G/K$	全測地的部分多様体	G'	$K\cap G'$
G_2	$G_2/(G_2)^{\gamma}$	$\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_1$	$(G_2)^{\gamma_H}(\cong(Sp(1)\times Sp(1))/\mathbf{Z}_2)$	$(SO(2)\times SO(2))/\mathbf{Z}_2\cdot\{1,\gamma_C\}$
G_2	$G_2/(G_2)^{\gamma_C}$	$\mathcal{A}_2$	$(G_2)^{w_3}(\cong SU(3))$	$SO(3)$
F_4	$F_4/(F_4)^{\gamma}$	$\mathcal{A}_1\times\mathcal{C}_3$	$(F_4)^{\gamma_H}(\cong(Sp(1)\times Sp(3))/\mathbf{Z}_2)$	$(U(1)\times U(3))/\mathbf{Z}_2\cdot\{1,\gamma_C\}$
F_4	$F_4/(F_4)^{\gamma}$	$\mathcal{B}_4$	$(F_4)^{\sigma}(\cong Spin(9))$	$(Spin(4)\times Spin(5)/\mathbf{Z}_2$
F_4	$F_4/(F_4)^{\gamma_C}$	$\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_2$	$(F_4)^{w_3}(\cong(SU(3)\times SU(3))/\mathbf{Z}_3)$	$SO(3)\times SO(3)$
E_6	$E_6/(E_6)^{\lambda\gamma_C}$	$\mathcal{A}_1\times\mathcal{C}_5$	$(E_6)^{\gamma}(\cong(Sp(1)\times SU(6))/\mathbf{Z}_2)$	$(U(1)\times SO(6))/\mathbf{Z}_2\cdot\{1,\gamma_H\}$
E_6	$E_6/(E_6)^{\lambda\gamma}$	$S^1\times\mathcal{D}_5$	$(E_6)^{\sigma}(\cong(U(1)\times Spin(10))/\mathbf{Z}_4)$	$(Spin(5)\times Spin(5))/\mathbf{Z}_2\cdot\{1,\rho_4\}$
E_6	$E_6/(E_6)^{\lambda\gamma}$	$\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_2$	$(E_6)^{w_3}(\cong(SU(3)\times SU(3)\times SU(3))/\mathbf{Z}_3)$	$SO(3)\times SO(3)\times SO(3)$
E_7	$E_7/(E_7)^{\lambda\gamma}$	$\mathcal{A}_1\times\mathcal{D}_6$	$(E_7)^{\sigma}(\cong(SU(2)\times Spin(12))/\mathbf{Z}_4)$	$(SO(2)\times Spin(6)\times Spin(6))/(\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_4)$
E_7	$E_7/(E_7)^{\tau\gamma_C}$	$\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_5$	$(E_7)^{w_3}(\cong(SU(3)\times SU(6))/\mathbf{Z}_3)$	$SO(3)\times SO(6)$
E_7	$E_7/(E_7)^{\lambda\gamma}$	$\mathcal{A}_7$	$(E_7)^{\iota\gamma_C}(\cong(SU(8)/\mathbf{Z}_2)$	$SO(8)\times\{1,-1\}$
E_7	$E_7/(E_7)^{\lambda\gamma}$	$S_1\times\mathcal{E}_6$	$(E_7)^{\iota}(\cong(U(1)\times E_6)/\mathbf{Z}_3)$	$Sp(4)/\mathbf{Z}_2\times\{1,-1\}$
E_8	$E_8/(E_8)^{\sigma}$	$\mathcal{D}_8$	$(E_8)^{\sigma'}(\cong Ss(16))$	$(Spin(8)\times Spin(8))/\mathbf{Z}_2$
E_8	$\check{E}_8/(\check{E}_8)^{\check{\lambda}}$	$\mathcal{A}_8$	$(\check{E}_8)^{w_3}(\cong SU(9)/\mathbf{Z}_3)$	$SO(9)$
E_8	$\tilde{E}_8/(\tilde{E}_8)^{\tilde{\lambda}}$	$\mathcal{A}_4\times\mathcal{A}_4$	$(\tilde{E}_8)^{z_5}(\cong(SU(5)\times SU(5))/\mathbf{Z}_5)$	$SO(5)\times SO(5)$
E_8	$\hat{E}_8/(\hat{E}_8)^{z_3}$	$\mathcal{A}_2\times\mathcal{E}_6$	$(E_8)^{w}(\cong(SU(3)\times E_6)/\mathbf{Z}_3)$	$(SO(3)\times Sp(4))/\mathbf{Z}_2$
E_8	$E_8/(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$	$\mathcal{A}_1\times\mathcal{E}_7$	$(E_8)^{\varepsilon}(\cong(SU(2)\times E_7)/\mathbf{Z}_2)$	$(SO(2)\times SU(8))/\mathbf{Z}_2\cdot\{1,\varepsilon\}$

(注．記号 $\cdot$ は半直積を表す)

3. ある Lie 部分群の連結性の証明

Lie 群の連結性を示すために，よく知られている定理に次の 2 つが在る．

○**定理１** (E. Cartan-P.K.Rasěvskii)

G を単連結 Lie 群とし，σ を G の有限位数の自己同型写像とする．このとき，G^σ は連結である．

○**定理２**

G を Lie 群，H をその閉部分群とする．このとき，H が連結，G/H も連結ならば，G は連結である．

定理 1 は，有限位数の自己同型写像の不動点部分群の連結性を示す場面でよくお世話になる．ここでは，紙面の制約上定理 2 を使って例外群 F_4 のある固定部分群の連結性を示し，その群が $Spin(3)$ に同型になることの紹介にとどめる．

- $\boxed{(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7} \cong Spin(3)}$ (注．$E_1, E_2-E_3, F_1(e_k) \in \mathfrak{J}$，[8] 参照)

$*$ $\boxed{(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=2,3,4,5,6,7} \cong U(1)}$ (まず，左記同型を下記写像を定義して証明)

$$D: U(1) \to (F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=2,3,4,5,6,7},\ D(a)X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3a & \overline{ax_2} \\ \overline{x_3a} & \xi_2 & \overline{a}x_1\overline{a} \\ ax_2 & a\overline{x}_1a & \xi_3 \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{J}$$

$\Rightarrow$ $(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=2,3,4,5,6,7}$ ：連結

$*$ $\boxed{(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}/U(1) \simeq S^2}$ (次に，左記同相を証明)

$$\cdot V^3 = \{X \in \mathfrak{J} \,|\, E_1 \circ X = 0,\ \mathrm{tr}(X) = 0,\ (E_2 - E_3) \circ X = 0, (F_1(e_k), X) = 0,{}_{k=3,4,5,6,7}\}$$
$$= \{X = F_1(x) \,|\, x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2, x_k \in \boldsymbol{R}\},\ \text{norm}\ (1/2)(X,X) = x\overline{x}$$

$\cdot S^2 = \{X = F_1(x) \in V^3 \,|\, (1/2)(X,X) = 1\}$: 2 次元球面

$\to$ 群 $(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}$ は S^2 に推移的に働く (実際，以下参照)

$$^\forall X = F_1(x) \in S^2 \xrightarrow{\delta_{02}(-t_0)} X' = F_1(x_1e_1 + x_2{}'e_2) \in S^2\ (\delta_{02}(-t_0) = \exp((-t_0)G_{02}))$$
$$\xrightarrow{\delta_{12}(-t_1)} X_0 = F_1(e_2) \in S^2\ (\delta_{12}(-t_1) = \exp((-t_1)G_{12}))$$

(注. $G_{ij} \in \mathfrak{so}(8)$, [8] 参照. t_0, t_1:x_k等に依存して決まる)

$\cdot X_0 = F_1(e_2)$ での固定化群 : $(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=2,3,4,5,6,7}(\cong U(1) \cong Spin(2))$

$\Rightarrow$ $U(1), S^2$: 連結 $\to$ $(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}$ ：連結

$*$ $\boxed{(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(3),\ \boldsymbol{Z}_2 = \{1, \sigma\}}$ (最後に，左記同型を証明)

$$\pi : (F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7} \to SO(3) = SO(V^3),\ \pi(\alpha) = \alpha|_{V^3}$$

(注．π は連続，$(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}$ 連結であるから，$SO(3)$ に写像が定義可.)

$\Rightarrow$ $(F_4)_{E_1,E_2-E_3,F_1(e_k),k=3,4,5,6,7}$ は $SO(3)$ の連結な被覆群として $Spin(3)$ に同型

参考文献

[1] Y. Bahturin and M. Goze, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-symmetric spaces. Pacific Journal of Math. 236-1(2008), 1-21.

[2] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 74 (1957), 85-177.

[3] S. Kaneyuki, On the subalgebra $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ev}$ of semisimple Lie algebra, J. Math. Soc. Japan, 45(1993), 1-19.

[4] A. Kollross, Exceptional $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-symmetric spaces. Pacific Journal of Math. 242-1(2009), 113-130.

[5] O. Ikawa and H.Tasaki, Totally geodesic submanifolds of maximal rank in symmetric spaces, Japanese Journal of Math. 26 no.1 (2000), 1-29

[6] S. Hegason, Defferential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press (1978)

[7] R. Lutz, Sur lagéométrie des espaces Γ-symétriques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293, no. 1 (1981) 55-5

[8] I. Yokota, Exceptional simple Lie groups. arXiv:0902.0431vl.

[9] T. Miyashita and I. Yokota: 2-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{ev}, \mathfrak{g}_0$, Part III, $G = E_8$, Japanese J. Math. 26-1(2000), 31-50.

[10] I. Yokota: Realization of involutive automorphisms σ of exceptional Lie groups G, Part I, $G = G_2, F_4, E_6$, Tsukuba J. Math. 14(1990), 185-223.

[11] I. Yokota: Realization of involutive automorphisms σ of exceptional Lie groups G, Part II, $G = E_7$, Tsukuba J. Math. 14(1990), 379-404.

[12] I. Yokota: Realization of involutive automorphisms σ of exceptional Lie groups G, Part III, $G = E_8$, Tsukuba J. Math. 15(1991), 301-314.

[13] I. Yokota: 2-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{\mathrm{ev}}, \mathfrak{g}_0$, Part I, $G = G_2, F_4, E_6$ Japanese J. Math. 24(1998), 258-296.

[14] I. Yokota: 2-graded decompositions of exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}$ and group realizations of $\mathfrak{g}_{\mathrm{ev}}, \mathfrak{g}_0$, Part II, $G = E_7$, Japanese J. Math. , 25(1999), 155-179.