

## 3次元時空の空間的極大曲面と、その時間的極小曲面への型変化について

東工大・情報理工学研究科 梅原 雅顕

今回の話は、最近出版された岡山大の藤森氏，高麗大の Y. W. Kim 氏と S.-D. Yang 氏，建国大の S.-E. Koh 氏（韓国）中央大の H. Shin 氏，神戸大の Rossman 氏，東工大の山田氏との共同論文 [4] の解説である．

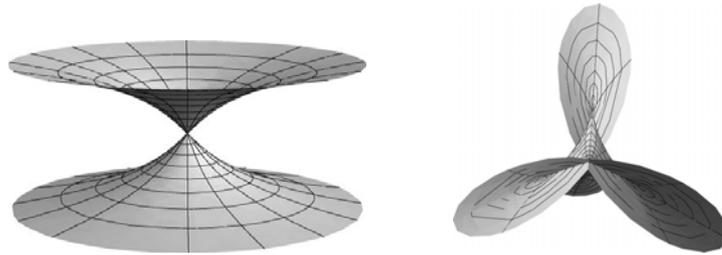


図 1. (第 1 種カテナイドと第 1 種 Enneper 曲面)

### 1. 3次元時空 $\mathbf{R}_1^3$ の空間的極大曲面

符号数  $(++-)$  の 3次元時空を  $\mathbf{R}_1^3$  で表す． $\mathbf{R}_1^3$  における極大曲面については小林治氏 (83, 84 年) による 2 本の先駆的な論文がある．まず，3次元 Euclid 空間の極小曲面との関係から紹介する． $M^2$  を Riemann 面とし， $F = (F^1, F^2, F^3) : M^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$  を正則はめ込みとする．このとき

$$(F_z^1)^2 + (F_z^2)^2 + (F_z^3)^2 = 0 \quad (F_z^i := dF^i/dz, i = 1, 2, 3).$$

なる  $F$  を零的 (null) と云う．このとき，以下の 2 つが知られている．

- 写像  $\text{Re}(F^1, F^2, F^3)$  は  $\mathbf{R}^3$  への共形的極小はめ込みを与える．
- 写像  $\text{Re}(F^1, F^2, -iF^3)$  は， $\mathbf{R}_1^3$  への (特異点を許す) 共形的極大はめ込みを与える ([14, 15]) ．

つまり，零的正則写像  $F$  に対して実部の取り方を変えることで，Euclid 空間の極小曲面が得られたり，時空の極大曲面が得られたりする．この  $F$  を得られた極小曲面あるいは極大曲面の正則持ち上げとよぶことにする．

極大曲面の研究においては，特異点まで許容して大域的な議論ができるような曲面のクラスを設定する必要がある．実際，「はめ込まれた完備な極大曲面は平面に限る」ことが Calabi により示されており，それが以下に定義する極大面である．

定義.  $M^2$  を Riemann 面とする． $C^\infty$ -写像  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  が一般化された空間的極大曲面であるとは， $M^2$  の開かつ稠密な部分集合  $W$  が存在し，制限写像  $f|_W$  が平均曲率零の共形はめ

込みを与えるときを云う．さらに  $df(p) \neq 0$  を満たすとき， $f$  を極大面 (maxface) であるという<sup>1</sup>．

$f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  を一般化された空間的極大曲面とすると， $M^2$  の普遍被覆  $\tilde{M}^2$  上で定義された零的正則写像  $F: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$  が存在して

$$f \circ \pi = \operatorname{Re}(F^1, F^2, -iF^3)$$

を満たす．但し  $\pi: \tilde{M}^2 \rightarrow M^2$  は自然な射影とする． $f$  が極大面になることと  $F$  がはめ込みになることは同値であることが知られている (cf. [15])．図 1 は，小林 [14] で紹介されている第 1 種カテナイドと第 1 種 Enneper 曲面であり，前者は円錐的特異点をもつが，両者共に極大面を与える．この他にも今では，多くの非自明な極大面が構成されている (cf. [5], [12], [15])．極大面の代表的な特異点にはカスプ辺，ツバメの尾，カスプ状交叉帽子，円錐的特異点などがある (図 2 参照)．図 1 右の第 1 種 Enneper 曲面の特異点集合は 4 つの尖った点をもつ閉じた空間曲線を形成し，尖った点がツバメの尾に対応し，2 つのカスプ点の midpoint がカスプ状交叉帽子に，それ以外のすべての点がカスプ辺に対応する．

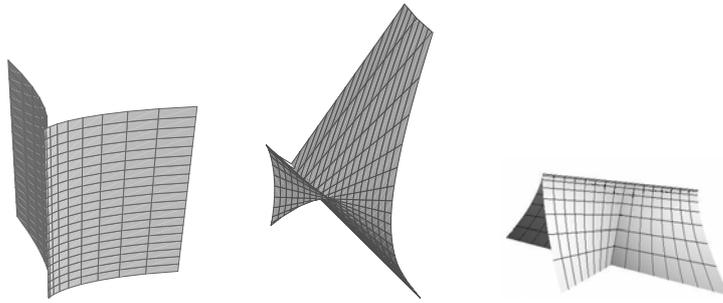


図 2. 標準的な，カスプ辺，ツバメの尾，カスプ状交叉帽子

## 2. 特異点の双対性

$M^2$  をリーマン面， $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  を極大面とし， $F: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  を  $f$  の正則持ち上げとすると  $f = \operatorname{Re}(F)$  と書ける．このとき虚部

$$f_* = \operatorname{Im}(F): \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$$

も極大曲面となり  $f$  と同じ第一基本形式をもつ．これを  $f$  に対する共役な極大曲面という． $f$  と  $f_*$  の特異点集合は共通で， $p$  を特異点とすると以下の双対性がある．

- $p$  が  $f$  のカスプ辺であることと， $f_*$  のカスプ辺であることは同値 ([7])．
- $p$  が  $f$  のツバメの尾であることと， $f_*$  のカスプ状交叉帽子であることは同値 ([7])．

<sup>1</sup>一般化された空間的極大曲面は Estudillo-Romero[1] により定義され，極大面は [15] で定義された．向き付け不可能な極大曲面が存在する．論文 Fujimori-Lopez [3] では，向き付け不可能な極大面を定義し，例を構成しているが，ここでは，向き付け可能なものだけ考える．

- $p$  が  $f$  の一般化された円錐的特異点であることと,  $f_*$  の折り目特異点であることは同値 ([4]).

特に, 円錐的特異点と折り目特異点との双対性は, 今回の話では重要な役割を演ずる. ここでは, 特に先に紹介した第一種カテナイド (図 1 左) を例にとって説明しよう. 曲面は, 極座標を用いて

$$f(r, \theta) := \left( -\frac{\sin \theta}{r} + r \sin \theta, -\frac{\cos \theta}{r} + r \cos \theta, -2 \log r \right)$$

で与えられるが  $z = re^{i\theta}$  とおくと, その正則持ち上げは以下の式で与えられ,  $f$  は以下の  $F$  の実部となる

$$F(z) := \left( -iz - \frac{i}{z}, z - \frac{1}{z}, -2 \log z \right).$$

ここで単位円  $\{|z| = 1\}$  の  $f$  による像は 1 点となり,  $f$  の円錐的特異点を構成する.

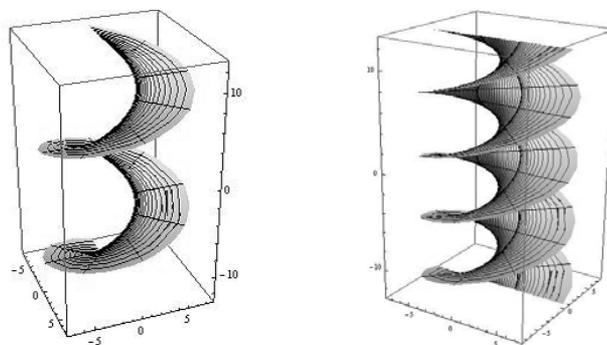


図 3. 空間的ヘリコイドとその解析的延長

$f$  の共役曲面は  $F$  の虚部をとったものであるから

$$f_*(r, \theta) := \left( -r \cos \theta - \frac{\cos \theta}{r}, r \sin \theta + \frac{\sin \theta}{r}, -2\theta \right)$$

で与えられ, 極大ヘリコイドと呼ばれる. この曲面は 単位円  $\{r = 1\}$  上の点がすべて折り目特異点となり  $r > 1$  の部分と  $r < 1$  の部分で同じ曲面の像を 2 回覆っている.  $f_*$  を図示すると, 図 3 左のようになる. 曲面が切れているように見えるが, これは極大曲面だけを考えているからであり, 時間的な曲面へ実解析的に接続している. 実際

$$x := -\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad y := \left(r + \frac{1}{r}\right) \sin \theta, \quad z := -2\theta$$

とおくと陰関数表示

$$(\diamond) \quad \sin(z/2)x - \cos(z/2)y = 0$$

をもつ, これは奇しくも  $\mathbf{R}^3$  の極小曲面のヘリコイドとまったく同じ曲面になっている. この曲面  $(\diamond)$  は

- 時間的なヘリコイド (図3右の芯の部分),
- $f_*$  の表示で  $r > 0$  の部分,
- $f_*$  の表示で  $r < 0$  の部分

の3つの部品で成り立っている．全体像は Euclid 空間の極小曲面としての古典的ヘリコイドそのものとなり，図3右のようになる．これは特殊な現象ではなく，実は以下の事実が知られている．

**Fact A** ([8, 9, 10], [13], [11]). 空間的極大曲面は，折り目特異点において，特異点を超えて時間的な極小曲面に滑らかに拡張される．

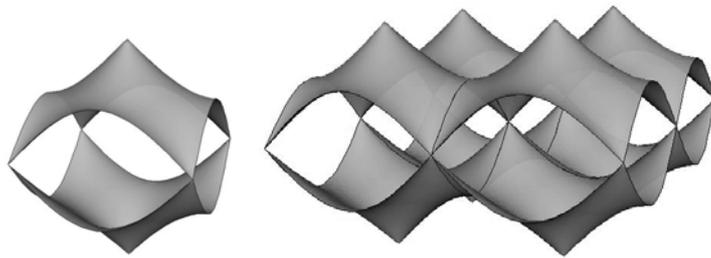


図 4. Schwarz-P 型極大曲面 (FRUYY09 絵：藤森)

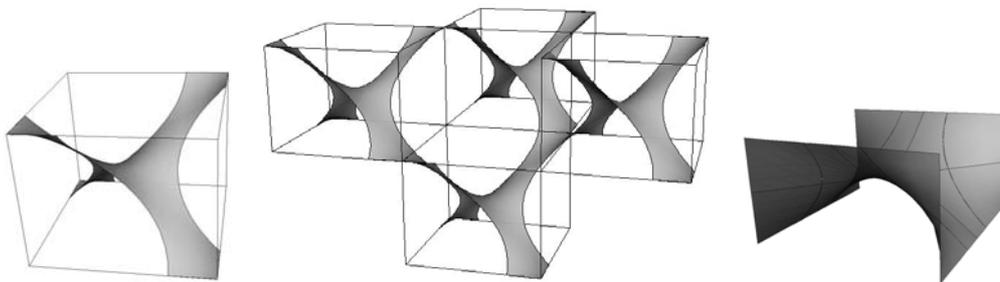


図 5. Schwarz-D 型極大曲面 (FRUYY[5], 絵：藤森)

最近，筆者等はシュワルツ P 型の 3 重周期的な極小曲面の正則持ち上げを，このノートの冒頭で述べた方法で  $\mathbb{R}_1^3$  に射影し，3 重周期的な極大曲面を得た (シュワルツ P 型の極大曲面とよぶ)．それが図 4 であるが，円錐的特異点をもつ．その共役曲面も 3 重周期的極大曲面 (シュワルツ D 型の極大曲面と命名) となるが，それが図 5 左と中央である．これが実解析的な延長をもち，しかも埋め込まれた 3 重周期的な曲面を定めることを最近筆者等は証明した (cf. [6])．その解析的に延長した曲面の基本部品が図 5 右である．

### 3. KLYACHIN の定理と我々の主結果

正則曲線  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  は  $\gamma'(t)$  が光的であるとき null であるという。また

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \neq 0$$

のとき非退化であるという。空間的極大曲面の(時間的極小曲面への)型変化については、以下のことが成り立つ。これは Fact A の精密化であり、Gu [8, 9, 10], Klyachin [13] および [11] の結果をまとめたものである。わかりやすい証明が [4] に紹介されている。

**Fact B.** 極大曲面の折り目特異点集合は、非退化な null 曲線になる。逆に非退化な null 曲線を与えると一意的に、実解析的な平均曲率が零の正則曲面が存在し、与えられた曲線の上で型変化を起こす。

さらに Klyachin [13] は以下の深い結果を得ている。

(Klyachin の定理) 極大曲面が型変化を起こすのは、一般的に以下の2通りのケースに限る。

- (i) 非退化な null 曲線に沿う型変化、
- (ii) 光的直線に沿う型変化。

すでに (i) の場合の具体例を紹介したが、(ii) の場合の具体例は、今までまったく知られていなかった<sup>2</sup>。今回我々は、以下の定理を得た。

**定理 ([4])** 光的線分上で空間的極大曲面から時間的極小曲面へ型変化をする平均曲率零の正則曲面が存在する。

証明の方針は以下のとおり。  $t = f(x, y)$  のグラフで、極大曲面の微分方程式

$$(*) \quad (1 - f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - f_x^2)f_{yy} = 0.$$

を満たすもので

$$f(x, y) = y + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k(y)}{k} x^k,$$

---

<sup>2</sup>型変化を起こすわけではないが、光的直線を含み、そこで第一基本形式が退化する例が [2] に数多く構成されている。

の形の中級数展開をもつものが存在することを示せばよい．いま

$$(3.1) \quad b_k''(y) = -k(P_k + Q_k - R_k), \quad b_k(0) = b_k'(0) = 0, \quad (k = 4, 5, \dots),$$

$$P_k := \sum_{m=3}^{k-1} \frac{2(k-2m+3)}{k-m+2} b_m(y) b_{k-m+2}'(y) \quad (k \geq 4),$$

$$Q_k := \sum_{m=3}^{k-4} \sum_{n=3}^{k-m-1} \frac{3n-k+m-1}{mn} b_m'(y) b_n'(y) b_{k-m-n+2}(y) \quad (k \geq 7),$$

$$R_k := \sum_{m=3}^{k-4} \sum_{n=3}^{k-m-1} \frac{b_m(y) b_n(y) b_{k-m-n+2}''(y)}{k-m-n+2} \quad (k \geq 7),$$

とし

$$Q_k = R_k = 0 \quad (4 \leq k \leq 6)$$

とおくと，初期条件

$$b_k(0) = b_k'(0) = 0 \quad (k \geq 4).$$

のもとで，(3.1) で定まる  $b_k(y)$  は (\*) の形式的な巾級数解を与える．さらに Weierstrass の M 判定法を用いて， $y = 0$  における収束半径が正であることを示す，というのが大ざっぱな証明方針である．たとえば

$$b_0 = y, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = 3cy, \quad b_4 = -4c^2y^3, \quad b_5 = 9c^3y^5,$$

$$b_6 = -24c^2y^7, \quad b_7 = 70c^5y^9 - 14c^3y^3, \dots$$

であり，30項くらいまでの展開を求めて近似的に得られた曲面が図6に描かれている．

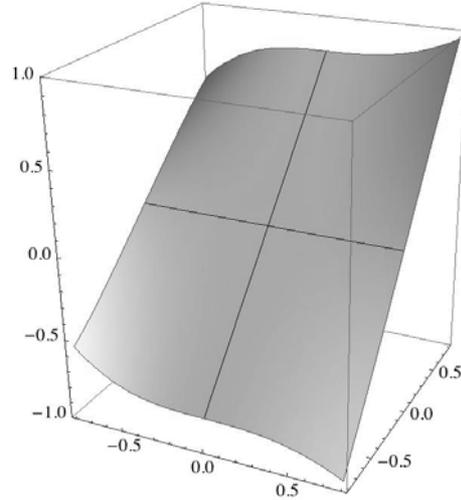


図 6. 光的線分上で型変化する平均曲率零の曲面

## REFERENCES

- [1] F. J. M. Estudillo and A. Romero, *Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **111** (1992), 515–524.
- [2] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in  $L^3$  containing a light-like line*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. **350** (2012), 975–978
- [3] S. Fujimori and F. J. Lopez, *Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. **62** (2010), no. 3, 311–328.
- [4] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Preprint (arXiv:1211.4912).
- [5] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Results in Math. **56** (2009), 41–82.
- [6] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero-mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, in preparation.
- [7] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827–848.
- [8] C. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta. Math. Sinica. **1** (1985), 173–180.
- [9] C. Gu, *A global study of extremal surfaces in 3-dimensional Minkowski space*, Differential geometry and differential equations (Shanghai, 1985), Lecture Notes in Math., 1255, Springer, Berlin, (1987) , 26–33.
- [10] C. Gu, *Extremal surfaces of mixed type in Minkowski space  $\mathbf{R}^{n+1}$* , Variational methods (Paris, 1988), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **4**, Birkhauser Boston, Boston, MA, (1990) 283–96.
- [11] Y. W. Kim, S.-E. Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, Journal of Korean Math. Soc. **48** (2011), 1083–1100.
- [12] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3379–3390.
- [13] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math., **67** (2003), 209–224.
- [14] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.
- [15] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.