toric Calabi-Yau 多様体上の Lagrangian mean curvature flow について

山本 光 (東工大数学専攻 M2)

1 Lagrangian mean curvature flow の一般論

我々が興味を持っている対象は Calabi–Yau 多様体の中で定義される特殊ラグランジュ部分多様体である．特殊ラグランジュ部分多様体は特に極小部分多様体である．しかし特殊ラグランジュ部分多様体の条件は非線形偏微分方程式で与えられるため一般には具体例を構成することは難しい．そこで我々はラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形することで特殊ラグランジュ部分多様体を得るという方法に注目する．ラグランジュ部分多様体を任意に置いて, それを平均曲率流に沿って変形すると, 体積が減少するので, 特殊ラグランジュ部分多様体に収束することが期待される．しかし一般には平均曲率流は blow-up を起こし flow が最後まで流れるとは限らない．実際, 現在のところ平均曲率流の挙動や blow-up の様子はあまり多くは知られていない．そこで今回我々は toric ケースに限って具体的なラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形し, その様子を観察した．以下ではそれぞれの基本的な概念を説明していく．

(M,ω) を複素 m 次元 Kähler 多様体とする． M 上至る所消えない正則 $(m,0)$-form Ω が存在するとき, 三つ組 (M,ω,Ω) を almost Calabi–Yau 多様体と呼ぶことにする．これは M の canonical line bundle K_M が trivial という条件と同値である．almost Calabi–Yau 多様体 M 上には以下の関係式によって, 関数 $\psi_M : M \to \mathbb{R}$ が定義される．

$$e^{2m\psi_M}\frac{\omega^m}{m!} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^m \Omega\wedge\bar{\Omega}. \tag{1}$$

この ψ_M が恒等的に 0 であるときが Calabi–Yau 多様体である．Calabi–Yau 多様体は Ricci flat であるが, almost Calabi–Yau 多様体は Ricci flat とは限らない．今回は Calabi–Yau 多様体よりも条件の緩い almost Calabi–Yau 多様体で議論を展開するため, よく知られた定義をいくつか修正する必要があることに注意せよ．

(M,ω,Ω) を複素 m 次元 almost Calabi–Yau 多様体とし, $F : L \to M$ をラグランジュ部分多様体（immersion でもよい）とする．すなわち L は実 m 次元多様体であり $F^*\omega = 0$. このとき $F^*\Omega$ は L 上至る所消えない複素数値 m-form である．従って L 上の局所座標 $(U, x^1, \ldots, x^m)$ を取ると, U 上の複素数値関数 h_U が存在して U 上で

$$F^*\Omega = h_U(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

と書ける．このとき, $h_U(x)$ の偏角を $\theta_F(x)$ と書くことにする．座標変換をしても h_U には変換関数つまり実数値関数（今 L は向き付け可能とは仮定していないので正か負かは分からない）が掛かるだけであるから $h_U(x)$ の偏角は（mod π で）変わらない．従ってこの定義で

$$\theta_F : L \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

という関数が定義される．この θ_F を写像 F の Lagrangian angle という．

定義 1. θ_F が恒等的に定数 θ であるとき, $F : L \to M$ を special Lagrangian 部分多様体 with phase $e^{i\theta}$ という．

special Lagrangian は歴史的には Harvey と Lawson の Calibrated geometries [2] においてまず Calabi–Yau 多様体の中で定義された．Calabi–Yau 多様体の場合は $\mathrm{Re}\,\Omega$ が calibration になり, special Lagrangian は $\mathrm{Re}\,\Omega$ に関する calibrated submanifold と定義されるので, そのホモロジー類の中で体積最小となる．さらに Calabi–Yau 多様体の場合は写像 F の平均曲率ベクトル H と Lagrangian angle θ_F が

$$H = J\nabla\theta_F \tag{2}$$

という関係式を満たすことも有名である．しかし, almost Calabi–Yau 多様体においては $\mathrm{Re}\,\Omega$ は calibration になるとは限らないので, 一般には special Lagrangian は体積最小とは限らない．また $H = J\nabla\theta_F$ という関係式も一般には成り立たない．$H = J\nabla\theta_F$ という関係式は Lagrangian angle θ_F が分かれば H も分かるという有用な式であるから, これが almost Calabi–Yau 多様体でも成り立つように平均曲率ベクトルの方を少し変形させる．それが次に紹介する T. Behrndt [1] が導入した “generalized mean curvature vector” *1 である．(M, ω, Ω) を複素 m 次元の almost Calabi–Yau 多様体とし, ψ_M は式 (1) で定義した M 上の関数とする．

定義 2 (Behrndt)**.** L を多様体とし, $F : L \to M$ を immersion とする．このとき

$$H^g := H - m(\nabla\psi_M)^{\perp},$$

を generalized mean curvature vector field という．

H は通常の平均曲率ベクトル, $\nabla\psi_M$ は M 上での ψ_M の gradient, $\perp$ はその TL に直交する成分である．H^g は H を Calabi–Yau からの “ずれ”ψ_M を用いて修正したものである．もし ambient が Calabi–Yau ならば ψ_M は恒等的に 0 であるから H^g と H は一致する．H^g に対しては先に述べたように式 (2) と同様の式が成り立つ．すなわち以下である．

定理 3 (Behrndt)**.** (M, ω, Ω) を almost Calabi–Yau 多様体, $F : L \to M$ を Lagrangian 部分多様体としたとき次が成り立つ．

$$H^g = J\nabla\theta_F.$$

このことから Lagrangian $F : L \to M$ が special Lagrangian であることと H^g が消えていることが同値であることも直ちに分かる．

さて, MCV*2 に沿って多様体を変形するのが, MCF であるから, 当然 GMCV に沿って多様体を変形する GMCF も考えられる．とくに我々は Lagrangian を初期値とする場合に興味がある．

定義 4 (Behrndt)**.** (M, ω, Ω) を almost Calabi–Yau 多様体, $f : L \to M$ を Lagrangian 部分多様体とする．このとき滑らかな写像 $F : L \times [0, T) \to M$ が初期条件 f の Lagrangian GMCF であるとは各 $t \in [0, T)$ に対

*1 幾何学的測度論の方に既に平均曲率ベクトルを測度論的に一般化した generalized mean curvature vector という言葉があるが, それとは全くの別物である．

*2 MCV=mean curvature vector, 以下同様に MCF=mean curvature flow, GMCV=generalized mean curvature vector, GMCF=generalized mean curvature flow

して $F_t := F(\cdot, t) : L \to M$ が Lagrangian 部分多様体になっていて次の微分方程式を満たすことである．

$$\left(\frac{d}{dt}F_t\right)^{\perp} = H_t^g, \quad F_0 = f$$

ここで H_t^g は F_t の GMCV である．

まず GMCF の解に関する基本的なこととして，L が compact ならば GMCF の short time existence はいくつかの古典的な結果を組み合わせて証明できる．さらに Behrndt が直接的な方法でも GMCF の short time existence を証明している．また初期値が special Lagrangian ならば H^g が消えているので，GMCF で動かない．従って，special Lagrangian は GMCF の stationary な解である．楽観的に考えれば Lagrangian は GMCF で流すと special Lagrangian に収束するように思える．しかし，これはいろいろと問題がある．Lagrangian mean curvature flow は ambient が $\mathbb{C}^m$ の場合に特に盛んに研究されている．今回は special Lagrangian 部分多様体の構成法や Lagrangian mean curvature flow の挙動に関して，ambient が toric のときに話を限定して考察する．

2　toric 幾何の準備

この章では toric 幾何学に関する基本的なことを説明する．$T^m_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^m$ で m 次元複素トーラス，$T^m \cong (S^1)^m$ で $T^m_{\mathbb{C}}$ の中の m 次元実トーラスを表すことにする．

定義 5. (M, ω) を複素 m 次元 Kähler 多様体とする．このとき (M, ω) が toric Kähler 多様体であるとは以下を満たすことである．まず M は複素多様体としては $T^m_{\mathbb{C}}$ が作用する algebraic toric variety で，(M, ω) は symplectic 多様体としては T^m が作用する toric symplectic 多様体である．特に ω は T^m の作用で不変である．

toric Kähler 多様体 M には moment map $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ とその像である moment polytope $\Delta := \mu(M)$ と fan Σ というデータが付随している．従って M の複素多様体としての構造は fan Σ により決定され，M の中には open dense な $T^m_{\mathbb{C}}$-orbit がある．また Δ は凸多面体になっている．moment polytope Δ は，$\mathbb{Z}^m$ の primitive な元 λ_i $(i = 1, \ldots, d)$ と定数 c_i $(i = 1, \ldots, d)$ を用いて次のように書ける．

$$\Delta = \{\, y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geqq c_i,\, i = 1, \ldots, d \,\}$$

実は toric Kähler 多様体上には anti-holomorphic かつ anti-symplectic な involution $\sigma : M \to M$ $(\sigma^2 = id)$ が存在する．このとき σ の fixed point 全体を

$$M^\sigma := \{\, p \in M \mid \sigma(p) = p \,\}$$

と書き，M の実形と呼ぶ．するとこれは M の中の半分次元の部分多様体である．moment map の実形 M^σ への制限を $\mu^\sigma : M^\sigma \to \Delta$ と書くと，μ^σ は Δ の 2^m-fold ramified covering になっている．ここで m は M の複素次元である．従って M^σ は位相的には Δ のコピーを 2^m 個用意して，各面をしかるべき組み合わせで張り合わせたものに同形である．

例 6. 例えば $\mathbb{C}^2$ は簡単な toric Kähler 多様体で，involution は通常の複素共役，実形は実平面 $\mathbb{R}^2$ 全体である．moment map は $\mu(z_1, z_2) := \frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2)$ であり，Δ は $\mathbb{R}^2$ の第一象限である．すると $\mathbb{R}^2$ 全平面は第一象限の 4 枚のコピーを貼り合わせたものになっている．

実は (M,ω) が toric Kähler のときは K_M が trivial になる条件, つまり almost Calabi–Yau になる条件, は簡単に記述できる．それは以下である．

$$\langle \gamma, \lambda_i \rangle = 1 \quad \text{for all} \quad i = 1, \dots, d$$

となる $\gamma \in \mathbb{Z}^m$ が存在する．実際このような γ があると, γ を用いて M 上至る所消えない正則 $(m,0)$-form Ω_γ を構成することができる．この (M,ω,Ω_γ) を toric almost Calabi–Yau 多様体と呼ぶことにする．また toric almost Calabi–Yau 多様体は必ず non-compact 多様体であることを注意しておく．Ω_γ の global な構成法はここでは書かないが M の open dense $T^m_{\mathbb{C}}$-orbit 上では具体的に,

$$\Omega_\gamma = \exp\left(\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_m z_m\right) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$$

と書くことができる．ここで z_i は $T^m_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^m$ の通常の座標 $(w_1, \dots, w_m)$ に対して $w_i = e^{z_i}$ で定義される $T^m_{\mathbb{C}}$ 上の座標[*3]である．

3　Lagrangian の具体的構成

(M,ω,Ω_γ) を上で説明した toric almost Calabi–Yau 多様体とする．この章では, この (M,ω,Ω_γ) の中にどのように Lagranagian を具体的に構成するかについて説明する．そこでまずは $\mathbb{C}^m$ の場合で考察してみることにする．$\mathbb{C}^m$ 内の Joyce の例 [3] は次のような表示をしていた．

$$L_{\zeta,c} = \{(e^{i\zeta_1 t}x_1, \dots, e^{i\zeta_m t}x_m) | t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}^m, \zeta_1 x_1^2 + \cdots + \zeta_m x_m^2 = c\}$$

ここで ζ は $\mathbb{Z}^m$ 内の primitive な元で c は定数．するとこのように作られる $L_{\zeta,c}$ は必ず Lagrangian になり, さらにこれが special Lagrangian になるのは

$$\zeta_1 + \cdots + \zeta_m = 0$$

のときであるという事実があった．この例を toric 多様体上で formulate するには次のように見る．$L_{\zeta,c}$ は $\mathbb{C}^m$ における moment map $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$; $\mu(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$ と複素共役 $\sigma : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$; $\sigma(z_1, \dots, z_m) = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m)$ と実形すなわち $(\mathbb{C}^m)^\sigma :=$ "σ の固定点全体"$= \mathbb{R}^m$ を用いて次のように書ける．

$$L_{\zeta,c} = \text{“}\exp(t\zeta)\text{-orbit of } \{\, x \in (\mathbb{C}^m)^\sigma \mid \langle \mu(x), \zeta \rangle = c \,\}\text{”}.$$

ここで $\exp(t\zeta) = (e^{i\zeta_1 t}, \dots, e^{i\zeta_m t}) \in T^m$ である．これはもっと intrinsic に書くことができる．まず ζ と c が定める $\mathbb{R}^m$ 内の hyperplane を $H_{\zeta,c} := \{\, y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, \zeta \rangle = c \,\}$ と書くことにする．また moment map μ の実形 (今の場合は $\mathbb{R}^m$) への制限を $\mu^\sigma : (\mathbb{C}^m)^\sigma \to \Delta$ と書くことにする．当然今の場合は Δ は $\mathbb{R}^m$ の第一象限である．さて Δ と $H_{\zeta,c}$ との共通部分を $\Delta_{\zeta,c} := \Delta \cap H_{\zeta,c}$ と置き, これを μ^σ で実形に pull-back した多様体を $M^\sigma_{\zeta,c} := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta,c})$ とおくと,

$$M^\sigma_{\zeta,c} = \{\, x \in (\mathbb{C}^m)^\sigma \mid \langle \mu(x), \zeta \rangle = c \,\}$$

となっている．$L_{\zeta,c}$ は $\mathbb{C}^m$ の中の subset として書かれてしまっているが, 写像の像して書くならば, 以下のようにする．まず

$$L_{\zeta,c} := M^\sigma_{\zeta,c} \times T^1$$

[*3] logarithmic holomorphic coordinates という

とし, $L_{\zeta,c}$ から $\mathbb{C}^m$ への写像 $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c} \to \mathbb{C}^m$ としては

$$F_{\zeta,c}(p,t) := \exp(t\zeta)\cdot p$$

というものを考えればよい. するとここに使われている全ての notation は $\mathbb{C}^m$ の構造に依存していない. 従ってこのまま toric 多様体上で formulate できる.

次のようにすればいい. toric almost Calabi–Yau 多様体 (M,ω,Ω_γ) に対して, $\mathbb{Z}^m$ 内の primitive な元 ζ と定数 c を取り,

$$\Delta_{\zeta,c} := \Delta\cap H_{\zeta,c}\,,\quad M^\sigma_{\zeta,c} := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta,c})$$

と定め, 多様体 $L_{\zeta,c}$ を

$$L_{\zeta,c} := M^\sigma_{\zeta,c}\times T^1$$

とする. そして写像 $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ を

$$F_{\zeta,c}(p,t) := \exp(t\zeta)\cdot p$$

と定める. このとき次が成り立つ.

定理 7 (Y)**.** $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ は Lagrangian 部分多様体であり Lagrangian angle は

$$\theta_{F_{\zeta,c}}(p,t) = 2\pi\Big(\langle\gamma,\zeta\rangle t\Big) + \frac{1}{2}\pi$$

で与えられる.

系 8 (Y)**.** $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ が SLag であることと $\langle\gamma,\zeta\rangle = 0$ であることは同値である. なおこのときの phase は $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ である.

注意 9. $L_{\zeta,c}$ は $L_{\zeta,c} = M^\sigma_{\zeta,c}\times T^1$ という topology をしていて, $M^\sigma_{\zeta,c}$ の topology は実形の topology 同様, $\Delta_{\zeta,c}$ のコピーを 2^m 個用意してそれぞれの境界で張り合わせたものになっている. 従って, $L_{\zeta,c}$ は多様な topology を持つが, その topology は fan Σ の組み合わせ的なデータだけから分かる.

注意 10. ζ と c の取り方次第では $L_{\zeta,c}$ は singular ($F_{\zeta,c}$ がある点で immersion ではなくなるという意味) になる. 例えば $\mathbb{C}^m$ で紹介した Joyce の例も $L_{\zeta,c}$ は $c=0$ とすると, 原点に conical sungularity を持つ Lagrangian になる. この現象と同様のことが一般の toric の場合でも起こる. 例えば $H_{\zeta,c}$ が Δ の vertex とぶつかる時は singurar になる.

4 Lagrangian mean curvature flow の挙動

我々は $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ という Lagrangian を構成し, そしてその Lagrangian angle を求めることで, $\langle\gamma,\zeta\rangle = 0$ であることと, この $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ が special Lagrangian であることが同値であることも分かった. では $\langle\gamma,\zeta\rangle\neq 0$ の場合は, $F_{\zeta,c}: L_{\zeta,c}\to M$ は special Lagrangian ではないので, これを初期値とする GMCF は動き出すわけである. では実際どのように動いて行くだろうか. 実はこの動きも explicit に分かる. まず $L_{\zeta,c}$ の動きを考える前に $\Delta_{\zeta,c}$ の動きを考える. $\Delta_{\zeta,c}$ は moment polytope Δ と ζ, c が定める超平面 $H_{\zeta,c}$ との共通部分であった. この超平面 $H_{\zeta,c}$ を速度 $2\pi\langle\gamma,\zeta\rangle$ で平行に動かして行く. 具体的には切片 $c(s)$ を以下のようにする.

$$c(s) := c - 2\pi\langle\gamma,\zeta\rangle s,\quad \Delta_{\zeta,c(s)} := \Delta\cap H_{\zeta,c(s)}.$$

s の動く範囲は $[0, s_0)$ とし, s_0 は平行に動く超平面が初めて Δ のどれかの vertex に当たる時刻とする．そして

$$M^\sigma_{\zeta,c(s)} := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta,c(s)}), \quad L_{\zeta,c(s)} := M^\sigma_{\zeta,c(s)} \times T^1$$

とおく．すると

$$\{\, F_{\zeta,c(s)} : L_{\zeta,c(s)} \to M \,\}_{t\in[0,s_0)}$$

は GMCF である．これが GMCF の挙動である．

smooth な MCF としては flow は, 平行に動く超平面が Δ のどれかの vertex に当たる直前までしか定義できない．超平面が vertex に当たると特異点ができる．しかし, 適当な意味で特異点の形成も許して flow をさらに先に進める事はできると思われる．そして一般には特異点通過後には多様体の topology が変わることが期待される．これを数学的に formulate することは今後の課題である．おそらく Brakke flow として formulate することが有効であろうと考えられる．

参考文献

[1] T. Behrndt. Generalized Lagrangian mean curvature flow in Kähler manifolds that are almost Einstein. In *Complex and Differential Geometry*, volume 8 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 65–79. Springer-Verlag, 2011.

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148:47–157, 1982.

[3] D. Joyce. Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries. *Duke Math. J.*, 115(1):1–51, 2002.