

曲率楕円と Lagrangian 曲面*

相山 玲子 (筑波大学数理物質系数域)[†]

4次元 Riemann 多様体内にはめ込まれた曲面について, その各点での曲率楕円の「形」や「位置」に注目して考察した結果を紹介する. 曲率楕円とは, 曲面上の各点での第2基本形式を, その点での単位接円から法平面への写像とみなしたときの像のことで, 一般に楕円の形をしている. 第1節では, 曲率楕円の定義とその「形」や「位置」を表す方法を与える. 第2節では, 4次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^4 内の曲面について, 曲率楕円が退化している場合に [1, 2] で得られた結果を紹介する. また, 曲率楕円が正円である場合の既知の結果 [8, 12] についても記しておく. 第3節では, 複素2次元平面 \mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面について, その曲率楕円が特殊な「位置」にある場合に限って考える. この場合の曲面は, B.-Y.Chen [4, 5, 6, 7] によって考察された Lagrangian H-umbilical 曲面に他ならない. \mathbb{C}^2 内の Lagrangian H-umbilical 曲面についての既知の結果を, 曲率楕円の観点からまとめて紹介する.

1 曲率楕円とは

S を連結な Riemann 面, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ を 4次元 Riemann 多様体, X を S から \widetilde{M} への共形) はめ込みとして, 曲面 $M = X(S)$ を考える. e_1, e_2, e_3, e_4 は M に沿った局所正規直交標構場とする (つまり, e_1, e_2 は M に接し, e_3, e_4 は直交している). 第2基本形式 $\Pi = (d^2X \cdot e_3)e_3 + (d^2X \cdot e_4)e_4$ の各成分を h_{ij}^α ($\alpha = 3, 4, i, j = 1, 2$) と書く. 平均曲率ベクトル \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = h^3 e_3 + h^4 e_4, \quad h^\alpha = \frac{1}{2}(h_{11}^\alpha + h_{22}^\alpha)$$

と与えられている. 単位接ベクトル $\xi_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ に対して, $\Pi(\xi_\theta, \xi_\theta) = \boldsymbol{\eta}(\theta)$ と表すと,

$$\boldsymbol{\eta}(\theta) - \mathbf{H} = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix} \mathcal{H} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_{11}^3 - h_{22}^3) & h_{12}^3 \\ \frac{1}{2}(h_{11}^4 - h_{22}^4) & h_{12}^4 \end{pmatrix}$$

*研究集会「部分多様体論・湯沢 2013」 2013年11月21日講演報告, 同年12月7日初稿

[†]e-mail: aiyama@math.tsukuba.ac.jp

となる. よって, M の点 p で $\det \mathcal{H} \neq 0$ であれば, $\boldsymbol{\eta}(\theta) (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ は \mathbf{H}_p を中心とする楕円を2周する軌跡を描く. ($\det \mathcal{H}(p) = 0$ のときは, 軌跡は線分に退化している.) そこで, $\boldsymbol{\eta}(\theta)$ の軌跡 \mathcal{E}_p は曲率楕円と呼ばれている (cf. [11, 14]).

曲率楕円の長径と短径は, 行列 \mathcal{H} の singular value decomposition を考えることによって求められる. すなわち, 非負対称行列 $B = \mathcal{H}^T \mathcal{H}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ とし, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} (i = 1, 2)$ とおけば, 適当な直交行列 U, V によって $\mathcal{H} = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V$ と分解されるので, σ_1 が長径で σ_2 が短径であるとわかる. また, σ_1, σ_2 は, 各接平面の正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ を取り替えてみると, $\|\Pi(e_1, e_1) - \Pi(e_2, e_2) \pm 2\Pi(e_1, e_2)\|/2\sqrt{2}$ の最大値と最小値を表すと考えてもよい.

曲率楕円の面積は, $\pi\sigma_1\sigma_2 = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \pi\sqrt{\det B} = \pi|\det \mathcal{H}|$ で与えられる. 法曲率を K_N で表せば, $2\det \mathcal{H} = K_N + \tilde{g}(\tilde{R}(e_1, e_2)e_3, e_4)$ であり, 特に \tilde{M} が定曲率空間の場合は $2\det \mathcal{H} = K_N$ で, 曲率楕円の面積は $\frac{\pi}{2}|K_N|$ に一致する.

曲率楕円の離心率 $e = \sqrt{1 - \frac{(\sigma_2)^2}{(\sigma_1)^2}}$ について考える. 楕円の離心率とは, $0 \leq e \leq 1$ で, $e = 0$ のときは円, $e = 1$ のときは線分であることを示す量である.

$$2|\det \mathcal{H}| = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{2-e^2} \text{Tr} B \leq \text{Tr} B \quad (\text{等号成立条件は円であること})$$

となることから, 特に \tilde{M} が定曲率 c を持つ場合は, 次の不等式が得られる (cf. [13], [10]). ここで K は曲面 M の Gauss 曲率を表す.

$$|K_N| \leq |\mathbf{H}|^2 - K + c \quad (\text{等号成立条件は曲率楕円が円であること}).$$

曲率楕円 \mathcal{E}_p が線分に退化している点 p を **semiumbilic point** とよぶ. (\tilde{M} が定曲率空間の場合は, $K_N(p) = 0$ である点といえる.) さらに, その線分が法平面の原点を通る直線上にある場合には, その点 p を **inflection point** とよぶ. すなわち, 第1法空間 $N_1(p) = \text{span}\{\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M\}$ の次元が1以下の点のことである. 例えば, \mathbb{R}^4 内の曲面 M で, 特に3次元球面 S^3 内に含まれているときには, 曲面 M 上の点はすべて semiumbilic point であるが, inflection point ではない. 3次元アフィン空間内に曲面 M が含まれているときは, 曲面 M 上の点はすべて inflection point である.

$$\Lambda := -h^3\varphi^4 + h^4\varphi^3, \quad \varphi^\alpha := \frac{1}{2}(h_{11}^\alpha - h_{22}^\alpha) - \sqrt{-1}h_{12}^\alpha \quad (\alpha = 3, 4)$$

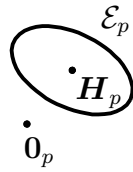
とおくと, inflection point に対する次の判別定理が得られる.

命題 1 (cf. [2]). 定曲率空間 \tilde{M} 内の曲面 M の点 p において, $\mathbf{H}_p \neq \mathbf{0}$ であるとする. 点 p が inflection point であるための必要十分条件は $\Lambda(p) = 0$ である.

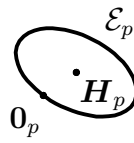
また, semiumbilic でない点では, 曲率楕円と法平面の原点との位置関係について次のように判別できる.

命題 2 (cf. [2], [9]). 定曲率空間 \widetilde{M} 内の曲面 M の点 p は semiumbilic point ではないとする. 法平面 $T_p^\perp M$ の原点 $\mathbf{0}_p$ と曲率楕円 \mathcal{E}_p の位置関係について,

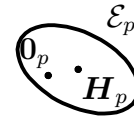
- (1) $\mathbf{0}_p$ が \mathcal{E}_p の外側にある (p が hyperbolic point である) ための必要十分条件は $|\Lambda(p)| > \frac{1}{2}|K_N(p)|$ である.
- (2) $\mathbf{0}_p$ が \mathcal{E}_p の周上にある (p が parabolic point である) ための必要十分条件は $|\Lambda(p)| = \frac{1}{2}|K_N(p)|$ である.
- (3) $\mathbf{0}_p$ が \mathcal{E}_p の内側にある (p が elliptic point である) ための必要十分条件は $|\Lambda(p)| < \frac{1}{2}|K_N(p)|$ である.



(1) hyperbolic



(2) parabolic



(3) elliptic

2 \mathbb{R}^4 内の曲面と曲率楕円

[1, 2] で得られた, inflection point に関する結果を紹介する.

定理 1 ([2]). \mathbb{R}^4 内で, Gauss 曲率 K がいたるところ 0 でなく, いたるところ inflection point である曲面は, 1 つの 3 次元アフィン空間 に含まれる.

注意 1. \mathbb{R}^4 内の曲面で, すべての点 p が inflection point であるものは, 局所的に, 可展面 (i.e. Gauss 曲率 $K = 0$ の線織面) であるか 3 次元アフィン空間に含まれていることは知られていた (cf. [11]).

特に極小曲面の場合には, Gauss 曲率に関する条件なしに, 次の定理が示せる.

定理 2 ([1]). \mathbb{R}^4 内で, いたるところ inflection point である極小曲面は, 1 つの 3 次元アフィン空間 に含まれる.

定理 3 ([1]). \mathbb{R}^4 内の極小曲面において, その法曲率が非負あるいは非正である仮定の下では, 法曲率が恒等的に零でない限り, inflection point は孤立している.

\mathbb{R}^4 内の曲面で, すべての点での曲率楕円が円となっているものについて言及しておく. このような曲面は 超共形的 と呼ばれており, 次のような特徴づけができることが知られている.

定理 (Dajczer-Tojeiro [8], Moriya [12]). $X : S \rightarrow \mathbb{R}^4$ を超共形的曲面とし, $\mathbf{H} \neq 0, K_N \neq 0$ であるとする. \mathbf{N} を \mathbf{H} に直交する単位法ベクトル場とする. このとき, $Y := X + \frac{1}{|\mathbf{H}|^2}\mathbf{H}, Z := -\frac{1}{|\mathbf{H}|}\mathbf{N}$ は共役な極小曲面となる. また逆に, \mathbb{R}^4 内の共役な 2 つの極小曲面に対して, 超共形的曲面が構成できる.

3 \mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面と曲率楕円

\mathbb{R}^4 に標準的な複素構造 J を与えて、 \mathbb{C}^2 内の特に Lagrangian 曲面の場合を考える。つまり、 $X : S \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $\langle dX, JdX \rangle = 0$ である共形的是め込みとして曲面 $M = X(S)$ を扱う。 M の局所正規直交標構場 e_1, e_2 に対して $e_3 = Je_1, e_4 = Je_2$ として、 M に沿った $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の局所正規直交標構場をとる。このとき、第2基本形式 Π の成分 h_{ij}^α について $h_{11}^4 = h_{12}^3, h_{12}^4 = h_{22}^3$ という関係が成り立つ。よって、 $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h^3 - h_{22}^3 & h_{12}^3 \\ h_{12}^3 - h^4 & h_{22}^3 \end{pmatrix}$ 。また、 $K = K_N$ である。

極小 Lagrangian 曲面では、 \mathcal{H} は対称行列でその固有値は λ と $-\lambda$ となるので、どの点においてもその曲率楕円は原点中心の円（点に退化する場合も含む）である。ちなみに、 \mathbb{C}^2 内の極小 Lagrangian 曲面は、 \mathbb{R}^4 の複素構造 J を適当に取り替えてやれば複素解析的曲線となるものである。

定理 (Castro[3]). \mathbb{C}^2 内の超共形的 Lagrangian 曲面は、極小であるか、あるいは Whitney 球面に局所的に合同である。

Whitney 球面とは、次のはめ込みで与えられる曲面である：

$$X : (x, y, z) \in S^2 \mapsto \frac{1}{1+z^2}(x(1+\sqrt{-1}z), y(1+\sqrt{-1}z)) \in \mathbb{C}^2.$$

$\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ の場合は、 M に沿う局所正規直交標構場として $e_1 = -J\left(\frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}\right)$, $e_2, e_3 = Je_1 = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$, $e_4 = Je_2$ をとることができる。このとき、 $h^3 = |\mathbf{H}|$, $h^4 = 0$ で、 $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| - h_{22}^3 & h_{12}^3 \\ h_{12}^3 & h_{22}^3 \end{pmatrix}$ 。

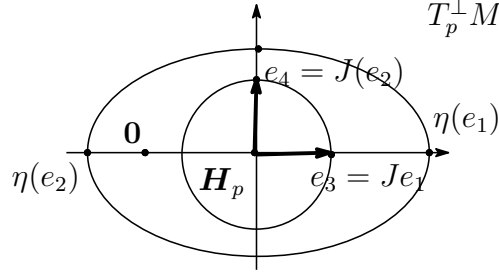
$e_3 = Je_1 = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$ および $\eta(e_1)$ が共に曲率楕円の長軸あるいは短軸方向にある場合を考えてみると、 $h_{12}^3 = 0$ でなければならない。すなわち、第2基本形式の成分は次のようにかかる。

$$(h_{ij}^3) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, (h_{ij}^4) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $\lambda + \mu = 2|\mathbf{H}| (> 0)$, $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ 。

このような局所正規直交標構場がとれる Lagrangian 曲面は、B.-Y. Chen [4, 5, 6, 7] によって **Lagrangian H-umbilical** と名付けられて研究されている。¹

¹[4, 5, 6, 7] では、特に $\lambda + \mu > 0$ は仮定しておらず、 $\lambda + \mu = 0$ のとなる点を含む場合も、全測地的でなければ Lagrangian H-umbilical 曲面と呼んでいる。



Lagrangian H-umbilical 曲面では, λ, μ の符号に応じて, 法平面の原点 $\mathbf{0}_p$ と曲率楕円 \mathcal{E}_p の位置が決まる:

- (1) $\lambda > 0, \mu > 0 \Leftrightarrow \mathbf{0}_p$ が \mathcal{E}_p の外側にある.
特に, $\lambda = \mu > 0$ である点 p は, semiumblc point であるが inflection point ではない.
- (2) $\lambda = 0, (\mu > 0) \Leftrightarrow \mathbf{0}_p$ が線分に退化していない \mathcal{E}_p の周上にある.
このとき, \mathbf{H} は短軸方向で, 長径は短径の 2 倍である.
- (3) $\mu = 0, (\lambda > 0) \Leftrightarrow \mathbf{0}_p$ が線分に退化している \mathcal{E}_p 上にある.
このとき, 点 p は inflection point であり, $\mathbf{0}_p$ は線分 \mathcal{E}_p の端点にある.
- (4) $\lambda\mu < 0 \Leftrightarrow \mathbf{0}_p$ が (線分に退化していない) \mathcal{E}_p の内側にある.

\mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面で, すべての点が inflection point であるものは, $K = K_N \equiv 0$ であるから, Little [11] の結果から局所的にある可展面に合同である. この可展面は次の命題と, B.-Y. Chen による 平坦な Lagrangian H-umbilical 曲面の分類結果 [7] から具体的に表示することができる.

命題 3. \mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面で, すべての点が inflection point であるものは, 平面か $\mu = 0$ の Lagrangian H-umbilical 曲面に局所的に合同である.

Proof. 極小 Lagrangian 曲面では曲率楕円はすべて円であるから, inflection point であるのは, 1 点に退化する場合のみ. すなわち, 全測地的曲面であり, 平面しかありえない. $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\Lambda \equiv 0$ より $\varphi^4 = h_{12}^3 - \sqrt{-1}h_{22}^3 \equiv 0$ となり, $\mu \equiv 0$, $\lambda \neq 0$ の Lagrangian H-umbilical 曲面になる. 点 p で $\mathbf{H}_p = \mathbf{0}$ であったとする. p の近傍 U では, ほとんどいたるところ $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ である場合を考えればよい. ほとんどいたるところで $\mu = 0, \lambda \neq 0$ の Lagrangian H-umbilical 曲面になるわけだから, p は $\mu = 0$ の Lagrangian H-umbilical の $\lambda = 0$ となる点 (測地的点) とみなせる. \square

$\mu \equiv 0$ の (平坦な) Lagrangian H-umbilical 曲面は次のいずれかに局所的に合同である ([7]):

(i) Lagrangian cylinder

$$X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2; \quad X(u, v) = C(u) + v\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2, \quad C(u) : \mathbb{C}^2 \text{ 内の単位速度曲線 s.t. } C'(u), JC'(u) \perp \mathbf{b}$$

このとき, $\lambda = \langle C''(u), JC'(u) \rangle$. (C が直線の場合は得られる曲面は平面であり, Lagrangian H -umbilical 曲面からは除外する.)

(ii) $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2; \quad X(u, v) = vz(u) + \int b(u)z'(u)du$
 $z : I \rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2$; 単位速度 Legendrian 曲線 (i.e. $\langle z'(u), Jz(s) \rangle = 0$)
 $b = b(u) \in C^\infty(I, \mathbb{R})$
 このとき, $\lambda = \langle z''(u), Jz'(u) \rangle$.

この他の平坦な Lagrangian H -umbilical 曲面としては $\lambda \equiv \mu$ の場合がある. $\lambda \equiv \mu \neq 0$ である (平坦な) Lagrangian H -umbilical 曲面は次の曲面に局所的に合同である ([4]):

(iii) $X(u, v) = \frac{d}{\sqrt{1+c^2}} e^{(i+c)u} (\cos v, \sin v), \quad (c, d \in \mathbb{R}, d > 0)$

この (iii) の曲面や前述の Whitney 球面は, 次の complex extensor of S^1 の特殊な場合である. (平面でない) Complex extensor of S^1 はすべて Lagrangian H -umbilical 曲面である ([4]).

$$X : I \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2; \quad X(u, v) = F(u)(\cos v, \sin v)$$

$$F : I \rightarrow \mathbb{C}; \text{ 正則曲線}$$

B.-Y. Chen は \mathbb{C}^2 内の Lagrangian H -umbilical 曲面に対して, この他にも, 平坦でない定曲率の場合の分類 ([7]) を行ったり, 定曲率でない場合には $e_1 = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$ の積分曲線が測地線であれば complex extensor of S^1 となる ([4]) ことを示したりしている. また, $\lambda = \alpha\mu$ ($\alpha \neq -1$: 定数) の非平坦 Lagrangian H -umbilical 曲面の構成・分類も試みており ([6]²), その結果を用いれば, 曲率楕円の離心率 e が一定 ($0 < e < 1$) の Lagrangian H -umbilical 曲面の構成・分類ができることになる.

参考文献

- [1] R. Aiyama and K. Akutagawa, Semiumbilic points for minimal surfaces in Euclidean 4-space, to appear in **Geom. Dedicata**.

²[4] の定理 4.3(ii-1) に誤りがあり, 後に [7] で訂正がなされている. よって, この結果を引用した [6] 定理 6.2 の分類にも訂正が施されなければならない. また, [7] での訂正にも平坦な場合に前述の $\lambda = \mu$ の場合が抜けているといった誤りがあることに注意しなければならない.

- [2] R. Aiyama and K. Akutagawa, Surfaces with inflection points in Euclidean 4-space, to appear in **Kodai Math. J.**
- [3] I. Castro, Lagrangian surfaces with circular ellipse of curvature in complex space forms, **Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.** **136**(2004) 239–245.
- [4] B. Y. Chen, Complex extensors and Lagrangian submanifolds in complex Euclidean spaces, **Tohoku Math. J.** **49**(1997), 277–297.
- [5] B. Y. Chen, Representation of flat Lagrangian H-umbilical submanifolds in Euclidean spaces, **Tohoku Math. J.** **51**(1999), 13-20.
- [6] B. Y. Chen, Intrinsic and Extrinsic structures of Lagrangian surfaces in complex space forms, **Tsukuba J. Math.** **22**(1998), 657–680.
- [7] B. Y. Chen, Lagrangian surfaces of constant curvature in complex Euclidean plane, **Tohoku Math. J.** **56**(2004), 289–298.
- [8] M. Dajczer and R. Tojeiro, All superconformal surfaces in \mathbb{R}^4 in terms of minimal surfaces, **Math. Z.** **261** (2009), 869–890.
- [9] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. D. C. R. Fuster and M. A. S. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, **Trans. Amer. Math. Soc.** **352**(2000), 3029–3043.
- [10] I. Guadalupe and L. Rodríguez, Normal curvature of surfaces in space forms, **Pacific J. Math.** **106** (1983), 95–103.
- [11] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, **Ann. Math. Pura Appl. (Ser. 4A)** **83** (1969), 261–335.
- [12] K. Moriya, Super-conformal surfaces associated with null complex holomorphic curves, **Bull. London Math. Soc.** **41**(2009), 327–331.
- [13] P. Wintgen, Sur l'inégalité de Chen-Willmore, **C. R. Acad. Sc. Paris T.** **288** (1979), Serie A, 993–995.
- [14] Y.-C. Wong, A new curvature theory for surfaces in a Euclidean 4-space, **Math. Helv.** **26** (1952), 152–170.