球面内の等径超曲面と運動量写像 —Grassmann 多様体の場合 *

藤井　忍 † (大島商船高等専門学校)

概要

本稿は研究集会「部分多様体論・湯沢 2013」での講演の要約である．本稿では, 階数 2 の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_2^{2+n}(\mathbb{K})$ (ただし, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$) の等方表現から得られる球面内の等質等径超曲面を定義する等径関数を, シンプレクティック線型空間 $V(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n\oplus\mathbb{K}^n$ 上のある Hamilton 作用の運動量写像の重みつきノルム 2 乗として表せることを説明する．

1　球面内の等径超曲面

球面 S^n 内の等径超曲面とは, $(S^n, \langle\ ,\ \rangle)$ 上の等径関数 $\varphi : S^n \to \mathbb{R}$ のレベル集合として定義される余次元 1 の部分多様体である．球面 S^n 内の任意の等径超曲面に対して, その等径関数は以下を満たす $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の g 次斉次多項式関数 φ の S^n 上の制限として得られることが知られている:

$$\begin{cases} \|\mathrm{grad}\,\varphi(P)\|^2 = g^2\,\|P\|^{2g-2}, \\ \Delta\varphi(P) = \dfrac{m_2-m_1}{2}g^2\,\|P\|^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, g は M の異なる主曲率の個数で, $g\in\{1,2,3,4,6\}$ である．また, m_i は主曲率を $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_g$ としたときの λ_i $(i=1,2)$ の重複度である．このような斉次多項式を **Cartan-Münzner 多項式**という．

---

* 研究集会「部分多様体論・湯沢 2013」(於 湯沢グランドホテル, 2013 年 11 月 21 日–23 日) 報告集用原稿.

† E-mail address: `shinofu@oshima-k.ac.jp`

等径超曲面の基本的性質等については尾関-高木-竹内 [8] や宮岡 [6] 等を参照していただきたい．4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面のうち, 現在知られているものは, 以下に挙げる階数 2 の対称空間の等方表現の主軌道として得られるものと, OT-FKM 型等径超曲面と呼ばれる, Clifford 代数の表現から構成されるものである ([9], [2]):

(1) $\mathrm{SO}(2+n)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n)$,

(2) $\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n))$,

(3) $\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5)$,

(4) $\mathrm{E}_6/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{Spin}(10)$,

(5) $\mathrm{Sp}(2+n)/\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(n)$,

(6) $\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(5)$.

このうち, (1), (2), (5) が階数 2 の Grassmann 多様体 (の等質空間表示) である．

我々は, 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面と運動量写像の関係を調べている．実際, 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面と運動量写像の関係について, 階数 2 のコンパクト Hermite 対称空間の等方表現の場合は講演者 ([3], [5]) によって, OT-FKM 型の場合はスピン表現から得られる運動量写像との関係が宮岡礼子氏によって示されている ([7])．この両者が関係あれば, その関係を利用して球面内の等径超曲面の統一的かつ幾何学的な方法による分類を行うことができるのではないかと期待している．

本稿の主定理は以下である:

主定理 (F. [4]). $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して $V(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n\oplus\mathbb{K}^n$ とし, 標準的なシンプレクティック形式 ω を入れる．このとき, Lie 群 $K:=\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{U}(1,\mathbb{K})\times\mathrm{SU}(n,\mathbb{K})$ は $V(\mathbb{K})$ に Hamilton 的に作用し, その運動量写像を $\mu: V(\mathbb{K})\to\mathfrak{k}$ とすると, $\mathfrak{k}$ 上の重みつきノルム $\|\cdot\|_{a,b,c}$ で, $\|\mu\|_{a,b,c}^2$ が 4 次 Cartan-Münzner 多項式になるものが存在する．

2 運動量写像

本節では, 運動量写像の定義とその性質について簡単にまとめる．Hamilton 作用や運動量写像に関する詳細なことは Audin [1] を参照していただきたい．

定義 2.1. $2n$ 次元 C^∞-多様体 M と, M 上の微分 2-形式 ω で, $d\omega=0$ かつ $\omega^{\wedge n}\neq 0$ なるものの組 (M,ω) を**シンプレクティック多様体**といい, ω を M の**シンプレクティック形式**という．

定義 2.2. Lie 群 K のシンプレクティック多様体 (M, ω) への作用が **Hamilton 的**であるとは, 以下を満たすことをいう:

(1) K-作用はシンプレクティック形式 ω を保つ,

(2) 運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が存在する.

ただし, $\mathfrak{k}^*$ は K の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の線型空間としての双対空間である. ここで写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が**運動量写像**であるとは,

(i) $(d\mu)_P(Q)(\xi) = \omega_P(\widetilde{\xi}_P, Q)$ for $P \in M$, $Q \in T_PM$, $\xi \in \mathfrak{k}$,

(ii) $\mu(a.P) = a.\mu(P)$ for $P \in M$, $a \in K$

を満たすときをいう. ここで $\widetilde{\xi}$ は以下で定義される M 上のベクトル場である:

$$M \ni P \overset{\widetilde{\xi}}{\longmapsto} \frac{d}{dt} \exp(t\xi).P \bigg|_{t=0} \in T_PM. \tag{2.1}$$

運動量写像の性質 (ii) は, 運動量写像は K-同変写像であることを意味する.

シンプレクティック線型空間 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の線型 Hamilton 作用の運動量写像は簡単に計算できる:

命題 2.3. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ に Lie 群 K が線型かつ Hamilton 的に作用しているとする. このとき, 以下で与えられる写像 $\mu : \mathbb{R}^{2n} \to \mathfrak{k}^*$ は K-作用の運動量写像である:

$$\mu(v)(\xi) = \frac{1}{2}\omega(\xi.v, v) \quad \text{for} \quad v \in \mathbb{R}^{2n}, \ \xi \in \mathfrak{k}. \tag{2.2}$$

ただし, $\mathfrak{k}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ に K-作用の微分表現を通じて作用するものとする.

3 主定理とその証明の概略

本節では, 主定理の詳細な主張を述べ, その証明の概略を与える.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とし, $\mathbb{K}^n$ 上の Euclid 内積 $\langle -, - \rangle_0$ を

$$\langle x, y \rangle_0 := \mathrm{Re}(\overline{{}^t x} y) \quad \text{for} \quad x, y \in \mathbb{K}^n \tag{3.1}$$

で定める. また, $V(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ 上のシンプレクティック形式 ω を

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \langle x_1, y_2 \rangle_0 - \langle x_2, y_1 \rangle_0 \quad \text{for} \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V(\mathbb{K}) \tag{3.2}$$

で定める. Lie 群 $K := \mathrm{SO}(2)\times \mathrm{U}(1,\mathbb{K})\times \mathrm{SU}(n,\mathbb{K})$ の $V(\mathbb{K})$ への作用を以下で定義する:

$$\mathrm{SO}(2)\times V(\mathbb{K})\to V(\mathbb{K});\quad (\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}, (x_1,x_2)) \mapsto (ax_1+bx_2, -bx_1+ax_1), \tag{3.3}$$

$$\mathrm{U}(1,\mathbb{K})\times V(\mathbb{K})\to V(\mathbb{K});\quad (\xi,(x_1,x_2))\mapsto (\xi x_1, \xi x_2), \tag{3.4}$$

$$\mathrm{SU}(n,\mathbb{K})\times V(\mathbb{K})\to V(\mathbb{K});\quad (A,(x_1,x_2))\mapsto (Ax_1, Ax_2). \tag{3.5}$$

ここで, $\mathrm{U}(1,\mathbb{K})$, $\mathrm{SU}(n,\mathbb{K})$ はそれぞれ以下の通り:

$$\mathrm{U}(n,\mathbb{K}) = \left\{X\in M_n(\mathbb{K}) \mid \overline{{}^tX}X = I_n\right\},$$
$$\mathrm{SU}(n,\mathbb{K}) = \left\{X\in \mathrm{U}(n,\mathbb{K}) \mid \det(X)=1\right\}.$$

ただし, $\mathrm{SU}(n,\mathbb{H}) = \mathrm{Sp}(n)$ とする ($\mathbb{K}=\mathbb{H}$ の場合, 行列式が意味をもたないため).

このとき, 次が主定理の詳細な主張である:

定理 3.1 (F. [4]).

(1) 上で定めた K-作用は Hamilton 作用である.

(2) K-作用の運動量写像を $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3 : V(\mathbb{K})\to \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2)\oplus\mathfrak{u}(1,\mathbb{K})\oplus\mathfrak{su}(n,\mathbb{K})$ とする. このとき, $\mathfrak{k}$ 上の重み付き K–不変ノルム $\|\cdot\|_{a,b,c}$ で,

$$\|\mu(P)\|^2_{a,b,c} := a\,\|\mu_1(P)\|^2_{\mathfrak{so}(2)} + b\,\|\mu_2(P)\|^2_{\mathfrak{u}(1,\mathbb{K})} + c\,\|\mu_3(P)\|^2_{\mathfrak{su}(n,\mathbb{K})} \tag{3.6}$$

が 4 次の Cartan–Münzner 多項式になるものが存在する. ただし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$, $\mathfrak{u}(1,\mathbb{K})$, $\mathfrak{su}(n,\mathbb{K})$ に対して

$$\langle x,y\rangle_{\mathfrak{g}} := \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\overline{{}^tX}Y) \quad \text{for} \quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{3.7}$$

証明の概略. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ の各々に対して, 以下のステップを実行すればよい:

(1) K-作用の運動量写像 μ_i ($i=1,2,3$) を計算する,

(2) μ の重みつきノルム 2 乗 $f_{a,b,c}(x_1,x_2) := \|\mu(x_1,x_2)\|^2_{a,b,c}$ を計算する,

(3) $\|\mathrm{grad}\, f_{a,b,c}(x_1,x_2)\|^2$, $\Delta f_{a,b,c}(x_1,x_2)$ を計算する,

(4) 上記の結果と Cartan-Münzner 多項式の条件を比較する. □

注意 3.2.

(1) a, b, c の値はそれぞれ以下の通り:

$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
(a,b,c)	$(-4,*,16)$	$(-4, \dfrac{64(n+2)}{n}, -16)$	$(-4,-16,-16)$

ただし, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合, $\mu_2(P)=0$ となるので, $b=*$ とした.

(2) 定理 3.1 で得た Cartan-Münzner 多項式は, 尾関-竹内 [10] で計算されているものと本質的には同じものである (違いは $\mathfrak{k}^*$ 上の K-不変内積の取り方と計算方法である). また, $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合の結果は論文 [3], [5] の結果に一致する.

(3) $\mathbb{K}=\mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合の K-作用はともに, 階数 2 の Grassmann 多様体

$$\mathrm{Gr}_2^{2+n}(\mathbb{C})=\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n)),\ \mathrm{Gr}_2^{2+n}(\mathbb{H})=\mathrm{Sp}(2+n)/\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(n)$$

の等方表現とは異なる群作用である.

参考文献

[1] Audin, M, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Second revised edition, Prog. in Math. **93**, Birkhäuser, 2004.

[2] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., "Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen", *Math. Z.*, **177** (1981), 479-502.

[3] Fujii, S., "Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps", *Tohoku Math. J.*, **62** (2010), 191-213.

[4] ———, "Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Grassmannian cases", in preparation.

[5] Fujii, S. and Tamaru, H., "Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Hermitian cases", submitted.

[6] 宮岡 礼子, "等径超曲面再訪", 数学 **53** (2001), 18-33.

[7] R. Miyaoka, "Moment maps of the spin action and the Cartan-Münzner polynomials of degree four", *Math. Ann.*, **355** (2013), 1067–1084.

[8] 尾関 英樹, 高木 亮一, 竹内 勝, "等径超曲面について", 数学 **30** (1978), 23-32.

[9] Ozeki, H. and Takeuchi, M., "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I", *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515-559.

[10] Ozeki, H. and Takeuchi, M., "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II", *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7-55.