

正則等長変換の不動点集合、 実形の交叉と対称三対

井川治 (京都工芸繊維大学)

筑波大学 田崎博之先生と東京理科大学 田中真紀子さんとの共同研究.
法政大学 間下克哉先生に有益な助言を頂きました.

1 導入

2次元球面 S^2 内に異なる大円を二つかくと、それらは二点で交わり、その二点は互いに対蹠点になる. S^2 を複素射影直線 CP^1 と見ると、大円はその実形と見ることができる.

一般に compact 対称空間 M の部分集合 $S \subset M$ が**対蹠集合**であるとは、任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となるときをいう. ここで、 s_x は x に関する点対称である. M の対蹠集合の元の個数の最大値を **2-number** といい、 $\#_2 M$ で表す. $\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という. これらの概念は Chen-長野が導入した ([2]).

ケーラー多様体の正則等長変換の固定点集合は、もしそれが離散的でなければ全測地的複素部分多様体になる. この講演では、compact 型 Hermitic 対称空間 M の正則等長変換固定点集合が離散的ならば M の対蹠集合や場合によっては大対蹠集合になることを示す.

また、球面内の二つの大円の交叉の場合を拡張して compact 型既約 Hermitic 対称空間内に二つの実形を考え、その交叉について考える. 一般に compact 型既約 Hermitic 対称空間内に二つの実形を考えるとそれらは合同とは限らない. 合同な二つの実形については、それらの交叉が離散的になるための条件を制限ルート系の言葉を用いて表現できる. また、交叉が離散的のとき、交叉を制限ルート系の定める Weyl 群による複素構造の軌道として表現することができる. 特に交叉は実形の大対蹠集合になる.

一方、対称三対は既約ルート系の拡張概念であり、Hermann 作用の軌道の性質を調べるために導入された ([5]). compact 型既約 Hermitic 対称

空間内に合同でない二つの実形を考えると, compact 対称三対が定まるので, そこから対称三対が定義できる. 二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉を用いて表現できる. この条件が講演者にとって驚くべきことに, 丁度, Hermann 作用の軌道が正則軌道になることに対応している. また, 交叉が離散的のとき, 交叉を対称三対の定める Weyl 群による複素構造の軌道として表現できる. 具体的に与えられた compact 型既約 Hermite 対称空間とその二つの実形について, それらの離散的な交叉の交点数は田中-田崎により Chen-長野理論を用いて得られていたが, 今回の結果を用いてそれらを再証明できる.

2 正則等長変換の不動点集合

一般に集合 X と X 上の全単射 g に対して

$$F(g, X) = \{x \in X \mid gx = x\}$$

とおく. M を compact 型既約 Hermite 対称空間とする. $I(M)$ と $A(M)$ でそれぞれ M の等長変換全体, 正則等長変換全体のなす Lie 変換群を表す. $I_0(M)$ と $A_0(M)$ でそれぞれ $I(M)$ と $A(M)$ の単位連結成分を表すと, $I_0(M) = A_0(M)$ となる.

定理 2.1. M を compact 型既約 Hermite 対称空間とする. $g \in A_0(M)$ とする. $F(g, M)$ が離散的になるための条件は g が正則元になることである. このとき, $F(g, M)$ は大対蹠集合になる.

次に $g \in A(M) - A_0(M)$ の場合を考える. 竹内勝により次が知られている ([7]).

$M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2}), G_m(\mathbb{C}^{2m})$ ($m \geq 2$) のとき,

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad A(M)/A_0(M) = \mathbb{Z}_2$$

M がその他の場合,

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2, \quad A(M) = A_0(M)$$

そこで $M = G_m(\mathbb{C}^{2m}), \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2})$ の場合について考えればよい.

$M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2})$ のとき,

$$A(M) = O(2m+2) \supset A_0(M) = SO(2m+2)$$

$g \in A(M) - A_0(M)$ に対して \mathbb{R}^{2m+2} の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_{2m+2}\}$ が存在して, g の $\{e_1, e_2, \dots, e_{2m+2}\}$ に関する表現行列は

$$g = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_m) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

という形になる.

定理 2.2. $M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2})$ ($m \geq 2$), $g \in A(M) - A_0(M)$ とする. このとき, $F(g, M)$ が離散的になるための必要十分条件は $R(\theta_1), \dots, R(\theta_m)$ が互いに異なることである. このとき, $F(g, M)$ は対蹠集合で,

$$\#F(g, M) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M$$

$M = G_m(\mathbb{C}^{2m})$ の場合には講演後に結果が得られた ([4]). M が既約でない compact 型 Hermite 対称空間の場合には M を既約分解することにより $F(\phi, M)$ ($\phi \in A(M)$) を既約の場合に帰着して調べられる ([4]).

3 compact 型既約 Hermite 対称空間内の 二つの実形の交叉

\mathfrak{g} を compact 単純 Lie 環とし, $J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\text{ad}J)^3 = -\text{ad}J$ ととる. $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ とし, $M = G \cdot J$ とおく. \mathfrak{g} 上に G -不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を入れる. G の閉部分群 K を $K = \{k \in G \mid k \cdot J = J\}$ とおく. \mathfrak{g} の部分空間 \mathfrak{m} を $\mathfrak{m} = \text{Im ad}J$ と定めると

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (\text{直交直和}).$$

J は \mathfrak{m} 上の K -作用と可換な複素構造を定める. このようにして $M \cong G/K$ は compact 型既約 Hermite 対称空間になる. 逆に全ての compact 型既約 Hermite 対称空間は, このようにして得られる. L を M の実形とする. すなわち, L は M のある対合的反正則等長同型写像 τ の固定点集合である. 実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体である. 正の正則断面曲率を持つ compact ケーラー多様体 (compact 型 Hermite 対称空間はこの

条件を満たす)の実形は連結になる ([12, Lemma 4.1]). また compact 型 Hermite 対称空間内の二つの実形は必ず交わる. compact 型既約エルミート対称空間の実形については [6], [8] で分類されている. G 上の対称的自己同型写像 I_τ を

$$I_\tau : G \mapsto G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

と定め, $F(I_\tau) = F(I_\tau, G)$ とおくと $(G, F(I_\tau))$ は compact 対称対になる. この対称対による \mathfrak{g} の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ と表すと $J \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ ([12, Theorem 4.3]). \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間 \mathfrak{a} を $J \in \mathfrak{a}$ となるようにとり, \mathfrak{a} に関する $(G, F(I_\tau))$ の制限ルート系を R と表す.

3.1 合同な二つの実形の交叉

交叉 $L \cap aL$ ($a \in G$) について考察する. そのためには $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) として一般性を失わない. [12, Theorem 4.3] より

$$L = M \cap \mathfrak{p}, \quad aL = M \cap a\mathfrak{p}, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p} \cap a\mathfrak{p})$$

定理 3.1. 交叉 $L \cap aL$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである. このとき, $L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$. 特に交叉は二点等質になる.

$M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合を表している. $M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$ となることは知られている ([1, p. 227, 8.101 Remark]). L の大対蹠集合に $W(R)$ が推移的に働くことも知られている ([9]).

3.2 合同でない二つの実形の交叉

L_1, L_2 を M の二つの実形とする. L から決まる対象物に対する記号と対応する L_i から決まる対象物には同じ記号を用いる. ただし, 添え字 i をつける.

以下, L_1 と L_2 は互いに合同でないと仮定する. このとき, τ_1 と τ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない. compact 対称三対の分類と実形の分類から I_{τ_1} と I_{τ_2} は可換にとれる. このとき,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の極大可換部分空間 \mathfrak{a} を $J \in \mathfrak{a}$ ととり, \mathfrak{p}_i ($i = 1, 2$) の極大可換部分空間 \mathfrak{a}_i を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_i$ ととる. \mathfrak{a} の極大性から $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ となる. compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$ の定める対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す.

交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a \in G$) について考察する. そのためには $a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) として一般性を失わない ([3]). [12, Theorem 4.3] より

$$L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1, \quad aL_2 = M \cap a\mathfrak{p}_2, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p}_1 \cap a\mathfrak{p}_2)$$

$H \in \mathfrak{a}$ が正則元であるとは, 任意の $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ となるときをいう.

定理 3.2. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである. このとき,

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

特に交叉は二点等質になる.

最近, 福島高専 馬場蔵人氏との共同研究により, $(G, F(I_{\tau_2}))$ が正規実形に付随する compact 対称対のときには, $\tilde{\Sigma} = R_1$ となることが示された. したがって, この場合には $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ. この条件を満たす (M, L_1, L_2) は全部で 6 種類ある ([11, Theorems 5.1, 5.2, 5.4–5.7] を参照). $(G, F(I_{\tau_2}))$ が正規実形に付随する compact 対称対でなくとも, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ となれば, $\tilde{\Sigma} = R_1$ であり, $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ. この条件を満たす (M, L_1, L_2) は一種類である ([10, Theorem 1.1] を参照).

$\tilde{\Sigma} \neq R_1, R_2$ となる (M, L_1, L_2) はただ一つである :

例 3.3. ([11, Theorem 5.3]) $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ のとき,

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J, \quad \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m, \quad \#_2(L_1) = \binom{2m}{m}, \quad \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

この場合には

$$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) = (\text{III-}C_m) = (C_m, C_m, C_m), \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$

となっている.

最後に、二つの実形 $L_i = F(\tau_i)$ の交叉について

$$L_1 \cap gL_2 \subset F(\tau_1^{-1}g\tau_2g^{-1}, M) \quad (g \in G)$$

が成り立つから、交叉が離散的のとき、 $L_1 \cap gL_2$ と $F(\tau_1^{-1}g\tau_2g^{-1}, M)$ の関係に興味があるが、これについても講演後に結果が得られた。 $F(\tau_1^{-1}g\tau_2g^{-1}, M)$ が離散的であっても $L_1 \cap gL_2$ と $F(\tau_1^{-1}g\tau_2g^{-1}, M)$ は一致するとは限らない ([4]).

参考文献

- [1] Arthur L. Besse, Einstein manifolds, Springer.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [3] E. Heintze, R. S. Palais, C. -L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 214–245.
- [4] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, in preparation.
- [5] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, **63** (2011) 79–136.
- [6] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom., **14** (1979), 179–185.
- [7] M. Takeuchi, On the fundamental group and the group of isometries of a symmetric space. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **10** (1964) 88–123.

- [8] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. Journ.* **36** (1984), 293–314.
- [9] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, *Nagoya Math. J.* **115** (1989), 43–46.
- [10] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 375–382.
- [11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. Japan*, **64** (2012) 1297–1332.
- [12] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, *Osaka J. Math.* **50** (2013), 161–169.