等径部分多様体上の法束のハミルトン極小性

梶ヶ谷徹* (東北大・理)

Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ の接束 $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{R}^{n+k} \oplus \mathbb{R}^{n+k}$ には, $\mathbb{R}^{n+k}$ からの標準的な内積が定まり, また, $(X, Y) \in T_p\mathbb{R}^{n+k} \oplus T_u\mathbb{R}^{n+k}$ for $z = (p, u) \in \mathbb{R}^{n+k} \oplus \mathbb{R}^{n+k}$ に対し, 複素構造 J を $J(X, Y) = (-Y, X)$ と定めることで, 自然に複素 Euclide 空間 $\mathbb{C}^{n+k}$ と同一視することができる. 以下では常にこの同一視のもと $T\mathbb{R}^{n+k}$ を $\mathbb{C}^{n+k}$ と見なす. N^n を Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする. N の法束 $\nu N := \{(p, u) \in T\mathbb{R}^{n+k};\ p \in N, u \perp T_pN\}$ が $T\mathbb{R}^{n+k}$ 内の標準的なシンプレクティック形式 ω に関してラグランジュ部分多様体になることはよく知られている. 本稿では, こうして得られるラグランジュ部分多様体の外在的性質について得たいくつかの結果 (論文 [3]) を紹介する.

1 $\mathbb{C}^{n+k}$ 内の法束の極小性, H-極小性

L^m を $\mathbb{C}^m$ 内の連結で向き付けられたラグランジュ部分多様体, すなわち $\omega|_L = 0$ かつ $\dim L = m$ となる部分多様体とする. L の**ラグランジュ角** θ とは, S^1 値関数 $\theta : L \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ であって次の関係式により定義されるものを言う:

$$e^{\sqrt{-1}\theta(p)} = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m(e_1, \ldots, e_m)(p),$$

ここで, $e_1, \ldots, e_m$ は接空間 T_pL の正規直交底である. L の平均曲率ベクトルを H とし, 平均曲率形式 $\alpha_H \in \Omega^1(L)$ を $\alpha_H := \omega(H, \cdot)|_L$ で定義する. このとき, 一般に次の等式が成り立つことが知られている:

$$\alpha_H = -d\theta. \tag{1}$$

この等式から, 直ちに, L が $\mathbb{C}^m$ 内で極小であることは, θ が定値関数であることと同値であることが分かる. 今の場合, L の極小性は L がある phase に関する特殊ラグランジュ部分多様体であることと同値であることに注意する ([1]). 特殊ラグランジュ部分多様体はホモロジー類内で体積最小という顕著な性質を持つことが知られている. 一方, 極小部分多様体の一つの拡張概念として, ハミルトン極小 (H-極小) 性がある. これはあらゆるコンパクサポートをもつハミルトン変形 (ハミルトンベクトル場により生成される無限小変形) のもとでの体積汎関数の停留値をとる部分多様体

*日本学術振興会特別研究員 (DC2), E-mail: sa9m09@math.tohoku.ac.jp

として特徴付けられ, Y.G.Oh[7] により導入された概念である. L が H-極小であるための必要十分条件は $\delta\alpha_H = 0$ を満たすことであり, (1) より $\Delta\theta = 0$ と同値である. 例えば, 標準的なトーラス T^m や平行な平均曲率ベクトルを持つラグランジュ部分多様体は H-極小である. H-極小ラグランジュ部分多様体は, ラグランジュ部分多様体のハミルトンイソトピー類内で「よい」代表元を与えるものとして期待されているが, (特殊ラグランジュ部分多様体を含め) $\mathbb{C}^m$ 内に多くの族が知られているわけではない. 本稿の一つの目的は, 法束の構成法を用いて, $\mathbb{C}^m$ 内に非コンパクトな H-極小ラグランジュ部分多様体の新しい族を与えることである.

N^n を標準的な内積を持つ Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする. N の法束として得られる $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内のラグランジュ部分多様体 νN を考える. 計算により, νN のラグランジュ角は次で与えられることが分かる:

$$\theta(p,u) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Arctan}\kappa_i(p,u) + \frac{k\pi}{2} \ (\mathrm{mod}\ 2\pi). \tag{2}$$

ここで, $\{\kappa_i(p,u)\}_{i=1}^n$ は, N の法ベクトル $u \in \nu_p N$ に対する形作用素 A^u の固有値である (特に, u が単位法ベクトルのとき, それは N の u 方向に関する**主曲率**と呼ばれる). この式から直ちに, Harvey-Lawson による次の定理が従う:

定理 1 ([1], Theorem 3.11)**.** N^n を Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする. このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内のある phase に関する特殊ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は, N が austere, すなわち, N の各単位法ベクトルに関する主曲率 $\{\kappa_i(p,u)\}_{i=1}^n$ が -1 倍に関して不変になることである.

この意味で, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の austere 部分多様体の構成は興味深く重要な問題である. 一方, これを H-極小性に対して拡張することを考えるのは自然である. (1), (2) より法束の H-極小性は, 次と同値である:

$$\Delta\tilde{\theta} = 0, \ \text{where } \tilde{\theta}(p,u) := \sum_{i=1}^{n} \arctan \kappa_i(p,u). \tag{3}$$

まず, 次のことに注意しておく:

命題 1 ([3])**.** N^n を $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする. このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内で平行な平均曲率ベクトルを持つならば, それは極小である. 従って, 次の 3 つは同値である: (i) N は austere, (ii) νN は極小, (iii) νN は平行な平均曲率ベクトルを持つ.

この意味で, 平行な平均曲率ベクトルを持つという意味での, 極小でない H-極小法束は存在しない. また, 二つの部分多様体の Riemann 直積 $N_1 \times N_2 \to \mathbb{R}^{n_1+k_1} \times \mathbb{R}^{n_2+k_2}$ の法束が H-極小であるための必要十分条件は, 各 N_i の法束が H-極小になることである. 従って, H-極小性だけなら既約なものを考えることが本質的である.

2 等径部分多様体上の法束の H-極小性

一般には, 形作用素の固有値に関する関係式 (3) を満たす部分多様体を特定するのは難しい. しかし, 等径超曲面またはより一般に等径部分多様体が最も調べやすいクラスとして考えられる. ここで, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の**等径部分多様体**とは, 次の条件を満たすものを言う:

(i) N 上の任意の区分的に滑らかな曲線 $c(t)$ に沿った平行な法ベクトル場 $u(t)$ に対して, 形作用素 $A^{u(t)}$ は一定の固有値を持つ.

(ii) N は平坦な法束を持つ. すなわち, $R^{\perp} = 0$.

(i) だけを満たす部分多様体は, 一定の主曲率を持つ部分多様体と呼ばれる. (ii) は形作用素が同時対角化可能であることを意味する. 等径部分多様体は $k = 1, 2$ のときは, それぞれ $\mathbb{R}^{n+1}$ および S^{n+1} 内の等径超曲面に一致する. $k \geq 3$ の場合は, Thorbergsson らの結果により, full かつ既約なら, s-表現 (対称空間のイソトロピー表現) の主軌道として得られることが知られている. 論文 [3] における主結果は次の定理である:

定理 2 ([3])**.** N を $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の full かつ既約な等径部分多様体とする. このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内の H-極小ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は, N があるコンパクト単純 Lie 群 G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴表現による主軌道になることである.

特に, コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴作用による主軌道の法束は H-極小ラグランジュ部分多様体の族を与える. この主軌道 N は複素旗多様体または C-space と呼ばれるものであり, $N \simeq G/T$ (T は極大トーラス) である. N はコンパクトであるから, austere にはなり得ず, νN は極小にはならない. また, この法束 νN は常に自明束, すなわち $\nu N \simeq N \times \mathbb{R}^k$ (同相) であることが分かる.

以下, 定理 2 の証明の概略を述べる. 等径部分多様体の余次元により場合を分けて議論する:

<u>$k = 1$ のとき</u>: このときは, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の等径超曲面であり, それは, (i) (アファイン) 超平面, (ii) 球面 $S^n(r)$, $r > 0$, (iii) spherical cylinder $S^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}, 0 < m < n$ のいずれかである. アファイン平面は明らかに austere である. また, 既約で非自明なものは超球面である. この場合, (3) より容易に次が示せる.

命題 2. 超球面 $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の法束が $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内で H-極小であるための必要十分条件は, $n = 2$ となることである.

<u>$k = 2$ のとき</u>: このときは, 本質的に $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面である. 球面内の等径超曲面の分類はまだ完了していないが, 現在知られている例には, 等質なものと非等質なものが存在する. 等質なものは, Hsiang-Lawson の結果により, 階数 2 の対称空間の線形イソトロピー表現の主軌道で与えられる. 一方, OT-FKM 型等径超曲面と呼ばれる非等質なものを無数に含む族が存在することが知られている. いずれにしてもその主曲率に関して, 次の Münzner の結果が使える:

定理 3 ([6])**.** (i) N の $S^{n+1}(1)$ 内における相異なる主曲率を $\kappa_i := \cot\theta_i$ $(i = 1, \ldots, g)$, その重複度を m_i とすると, 次が成り立つ:

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{i-1}{g}\pi, \text{ for } i = 1, \ldots, g,$$
$$m_i = m_{i+2}, \text{ modulo } g \text{ indexing.}$$

(ii) 相異なる主曲率の個数は次のいずれかである: $g = 1, 2, 3, 4, 6$.

この結果を, (3) に適用することで, 次を示すことができる:

補題 1. N^n を $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面とする. このとき, $\mathbb{R}^{n+2}$ の部分多様体として, N の法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内の H-極小 Lagrange 部分多様体であるならば, N の S^{n+1} 内における相異なる主曲率の重複度はすべて 2 である. 特に, N は等質である.

重複度がすべて 2 である場合の等質性は, $g \leq 3$ の場合は E. Cartan, $g = 4$ の場合は尾関-竹内により示され, 残る $g = 6$ の場合は宮岡により最近証明された [5].

より正確には, N は表 1 の Riemann 対称対 (U, K) のイソトロピー軌道のうち, いずれかと局所的に合同である.

g	(U, K)	$N \simeq K/K_0$	$\dim N$	N_+	N_-
1	$(S^1 \times SO(4), SO(3))$	S^2	2	$\{pt\}$	$\{pt\}$
2	$(SO(4) \times SO(4), SO(3) \times SO(3))$	$S^2 \times S^2$	4	S^2	S^2
3	$(SU(3) \times SU(3), SU(3))$	$SU(3)/T^2$	6	$\mathbb{C}P^2$	$\mathbb{C}P^2$
4	$(SO(5) \times SO(5), SO(5))$	$SO(5)/T^2$	8	$\mathbb{C}P^3$	$\mathbb{Q}^3$
6	$(G_2 \times G_2, G_2)$	G_2/T^2	12	$\mathbb{Q}^5$	$\mathbb{Q}^5$

表 1: $m = 2$ の球面内の等径超曲面. $\mathbb{Q}^n$ は複素二次超曲面. $N_\pm$ は焦部分多様体を表す.

表 1 に現れる等径超曲面の場合, $g = 1, 2$ のときはイソトロピー表現が可約で, 既約表現になっているのは, $g \geq 3$ の場合であり, それらは, Lie 群 K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ への随伴表現の主軌道になっていることが観察される. 実際これらは H-極小法束を持つことが示される (定理 2).

s-表現の主軌道のとき. 補題 1 と, Hsiang-Lawson, Thorbergsson らの結果により, あとは s-表現の主軌道を調べればよい. (U, K) をコンパクト型の Riemann 対称対とし, $(\mathfrak{u}, \sigma)$ を対応する直交対称 Lie 代数, $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を標準分解とする. N を線形イソトロピー表現 $\mathrm{Ad} : K \to SO(\mathfrak{p})$ による主軌道とする. $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり, $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系を R, $\mathfrak{p}$ 上の適当な基底のもとでの正のルート全体を R_+ とする. 制限ルート系に関する直交分解を

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{k}_\lambda, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{p}_\lambda$$

とする. このとき, 点 $w \in \mathfrak{p}$ を通る主軌道 $N = \mathrm{Ad}(K)w \subset \mathfrak{p}$ の接空間と法空間は,

$$T_w N = \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{p}_\lambda, \quad \nu_w N = \mathfrak{a}$$

で与えられる. また, N の形作用素は,

$$A^u(X_\lambda) = -\frac{\lambda(u)}{\lambda(w)} X_\lambda, \quad X_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda \text{ and } \lambda \in R_+$$

を満たす (cf. [2], [9]). 特にここから, N が平坦な法束を持つことが分かる. 実際 N は等径部分多様体である. 今, $m_\lambda := \dim \mathfrak{p}_\lambda$ とおき, $\lambda \in R_+$ に対する**重複度**と呼ぶ. 制限ルート系は一般には, reduced (i.e., 二つのルート λ, μ が $\lambda = c\mu$ ならば $c = \pm 1$) ではない. そこで,

$$r := \{\lambda \in R;\ \lambda/2 \neq R\}, \text{ and } r_+ := r \cap R_+$$

とおく. このとき, r は reduced なルート系である. また, $\lambda \in r_+$ に関して, $l_\lambda := m_\lambda + m_{2\lambda}$ とおく (もし, $2\lambda \notin r_+$ なら, $m_{2\lambda} = 0$ とする). このとき, ルート系に関する一般論を用いることで, 命題 2 および補題 1 を次のように一般化することができる:

命題 3. N を s-表現の主軌道とする. このとき, νN が $T\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内で H-極小ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は, すべての $\lambda \in r_+$ に対して $l_\lambda = 2$ となることである.

一方で, 次の II 型対称空間の特徴付けが知られている:

命題 4 (cf. [4])**.** $(\mathfrak{u}, \sigma)$ を効果的かつ既約なコンパクト型直交対称 Lie 代数とする. このとき, $(\mathfrak{u}, \sigma)$ の制限ルート系 R に対し, $\lambda \in R_+$ の重複度がすべて 2 であることと, $(\mathfrak{u}, \sigma)$ が II 型の直交対称 Lie 代数に同型であることは同値である.

II 型対称空間の線形イソトロピー表現は, 対応するコンパクト Lie 群 G の随伴表現に同値である. このことと, 命題 3,4 から定理 2 を示すことができる.

3 課題

今回は, 等径部分多様体を考えたため, コンパクト半単純 Lie 群の随伴表現の主軌道について定理を示したが, 特異軌道も同様の性質を持つことが期待される. また, austere やこれらの主軌道以外にも法束が H-極小になるものが厳密には存在する. 例えば, 球面内の等径超曲面の錐の法束を考えることでそのような例が一般の次元に構成できる (cf. [3]). なお, 榊 [8] によれば, $\mathbb{R}^3$ 内の曲面で H-極小法束を持つものは, 極小曲面 (austere), $S^2(r)$ および $S^1(1/\sqrt{2})$ の錐のいずれかである. また, 今回得た例のハミルトン安定性の解析も興味深い問題である.

参考文献

[1] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometry*, Acta Math. **148** (1982) 47-157.

[2] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 61, No. 2 (2009) 437-481.

[3] T. Kajigaya, *Hamiltonian minimality of normal bundles over the isoparametric submanifodls*, a preprint.

[4] O. Loos, *Symmetric spaces. II: Compact spaces and classification.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969.

[5] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 1, 53–110.

[6] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*, Math. Ann. **251** (1980), 57–71; *II*, **256** (1981), 215–232.

[7] Y. G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeit. 212 (1993), 175–192.

[8] M. Sakaki, *Hamiltonian stationary normal bundles of surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1509–1515.

[9] R. Takagi and T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, Differential geometry (in honor of Kentaro Yano), pp. 469–481. Kinokuniya, Tokyo, 1972.